ESERCIZI EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

Equazioni esponenziali

80 Risolvere l'equazione $\left(\frac{1}{10}\right)^{4x} = 1000 \cdot 10^{1-x}$

Trasformiamo entrambi i membri in potenze di 10, ottenendo

$$10^{-4x} = 10^3 \cdot 10^{1-x} \longrightarrow 10^{-4x} = 10^{3+1-x} \longrightarrow -4x = 4 - x \longrightarrow x = -\frac{4}{3}$$

Risolvere le seguenti equazioni esponenziali.

81 $3^x = 3^{2x-1}$; $9^x = 3$; $5^x = 25$; $7^{x+1} = 49$. $\left[1; \frac{1}{2}; 2; 1\right]$

82 $\frac{1}{2} = 4^x$; $10^x = 0{,}01$; $27^x = \frac{1}{3}$; $9^x = 27$. $\left[-\frac{1}{2}; -2; -\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right]$

83 $2^x = 32$; $3^x = \frac{1}{9}$; $(0{,}1)^x = 1.000$; $10^x = 0{,}0001$. $[5; -2; -3; -4]$

84 $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^2 = \frac{8}{27}$; $3^{-3x} = \frac{1}{9}$; $(a^{2x})^3 = a^{x^2}$. $\left[\frac{3}{2}; \frac{2}{3}; 0 \text{ e } 6\right]$

85 $3^x \cdot 9 = \frac{1}{3}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$; $(a^{1+x})^{1-x} = \frac{1}{a^3}$. $\left[-3; -\frac{1}{3}; \pm 2\right]$

86 $3^x + 2^x = 0$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x} = \left[\left(\frac{4}{9}\right)^{-2}\right]^{-3}$; $(8^x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$. $\left[\text{impossibile}; -12; -\frac{4}{3}\right]$

87 $2^x \cdot 4 = \frac{1}{4}$; $18^{x+1} = 3\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{25^{1-x}} = \sqrt{5}$; $\sqrt[3]{a^2} = a^{1-x}$. $\left[-4; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$

88 $6^{2x} = 216^{2x-1}$; $3^{1+2x} = 81$; $3^{x^2} = 81$; $25^{x-1} = 5$. $\left[\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; \pm 2; \frac{3}{2}\right]$

89 $5^{x^2+x} = 25$; $(0{,}1)^{4x} = 1.000$; $8^{3x} = 32^{4x-1}$. $\left[-2 \text{ e } 1; -\frac{3}{4}; \frac{5}{11}\right]$

90 $3^{x^2+x} = 1$; $2^{2-8x} = 4^{3x+1}$; $2^{x^3} = 256$. $[0 \text{ e } -1; 0; 2]$

91 $\sqrt{2\sqrt{2}} = 4^{1-x}$; $\frac{1}{4\sqrt{2}} = \sqrt{8^x}$; $\left(\frac{1}{n}\right)^{2x+1} = 1$. $\left[\frac{5}{8}; -\frac{5}{3}; -\frac{1}{2}\right]$

92 $(16^x)^{2x-1} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^2$; $0{,}04^x = 25^{1+x}$; $(3^x)^{1-x} = 1$. $\left[1 \text{ e } -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0 \text{ e } 1\right]$

93 $\frac{3^{x^2+5}}{27^{2x}} = \frac{1}{3^{x+1}}$; $4^{x-1} = \frac{1}{2^{x-x^2}}$; $4^{\frac{x+2}{x}} = 16$. $[2 \text{ e } 3; 1 \text{ e } 2; 2]$

94 $(125^x)^{1+x} = 1$; $2^{8x} = 4^{\frac{1}{x}}$; $a^{\frac{x-1}{3}} = \sqrt{a}$. $\left[-1 \text{ e } 0; \pm\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right]$

95 $81 \cdot 9^x = 9^{\frac{15}{x}}$; $3^{x-3} = 9^{-x}$; $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt[3]{4^{1-x}} = 8$. $[-5 \text{ e } 3; 1; -14]$

96 $\dfrac{3^{x-1}}{9}=\dfrac{27^{1-x}}{3^{2+x}}$; $\quad \dfrac{\sqrt[3]{32^x}}{(2^{x+2})^{x-2}}=1$; $\quad 16^{1+\frac{x}{2}}=4^{\frac{15}{x}}$. $\quad \left[\dfrac{4}{5};\ 3 \text{ e } -\dfrac{4}{3};\ -5 \text{ e } 3\right]$

97 $\sqrt{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}=1$; $\quad \sqrt[3]{5^x}=25$; $\quad 4^{4x}=2^{\frac{2}{x}}$. $\quad \left[-\dfrac{1}{2};\ 6;\ \pm\dfrac{1}{2}\right]$

98 $\dfrac{3^{1-x}\cdot 9^{2+x}}{27^x}=\dfrac{1}{3}$; $\quad \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}=\left(\dfrac{27}{8}\right)^{1-2x}$; $\quad \sqrt{2\sqrt{4^x}}=4$. $\quad \left[3;\ \dfrac{4}{5};\ 3\right]$

99 $\sqrt[x-1]{125}\cdot\sqrt[x+2]{5^8}=\sqrt[x-1]{25}\cdot\sqrt[2x-1]{5^9}$; $\quad \dfrac{9^{x+1}}{27^{3-2x}}=\dfrac{1}{81}\cdot 3^{1+x}$. $\quad \left[2;\ \dfrac{4}{7}\right]$

100 $\sqrt[1+x]{2^{3x}}=\sqrt[x]{2^{x+2}}\cdot\sqrt[2x]{2^{x-2}}$; $\quad \dfrac{(3^{x+1})^{2x-1}\cdot 27^{1-x}}{9^{2-x}}=1$. $\quad [2;\ \pm 1]$

101 $\sqrt[1+x^2]{8^{5x^2-3}}=4^{\frac{3(5-x^2)}{2(3x^2+1)}}$; $\quad \dfrac{\sqrt[3]{32^x}}{(2^{x+2})^{x-2}}=1$; $\quad \dfrac{\sqrt[3]{4^{x+1}}\cdot 2^{x-1}}{\sqrt{2^x}}=\dfrac{1}{4}$. $\quad \left[\pm 1;\ 3 \text{ e } -\dfrac{4}{3};\ -\dfrac{10}{7}\right]$

102 $\dfrac{\sqrt[2x-12]{4^{3x}}}{\sqrt{2^{x-1}}}=\dfrac{4}{\sqrt[x-6]{8^{6+x}}}$; $\quad \sqrt[x+2]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4x}}=\dfrac{16}{81}\sqrt[x]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x+2}}$. $\quad [18;\ 2]$

ESERCIZI SVOLTI

103 Risolviamo l'equazione

$$4^x-2^{2x+1}=2^{2x-1}-6$$

Essa equivale all'equazione $2^{2x}-2^{2x+1}-2^{2x-1}=-6$, che, a sua volta, ricordando le proprietà delle potenze, equivale a

$$2^{2x}-2^{2x}\cdot 2^1-2^{2x}\cdot\frac{1}{2}=-6$$

o anche

$$2^{2x}\left(1-2-\frac{1}{2}\right)=-6 \longrightarrow 2^{2x}\left(-\frac{3}{2}\right)=-6 \longrightarrow 2^{2x}=-6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 2^{2x}=2^2 \longrightarrow 2x=2 \longrightarrow x=1$$

104 Risolviamo l'equazione

$$9^x=6+3^x$$

Poiché $9=3^2$, tale equazione si può scrivere nella forma

$$(3^2)^x=6+3^x \longrightarrow 3^{2x}=6+3^x$$

Poniamo $y=3^x$, da cui $y^2=(3^x)^2=3^{2x}$, e sostituiamo, ottenendo

$$y^2=6+y \longrightarrow y^2-y-6=0 \longrightarrow y=3 \vee y=-2$$

Da $y=3$, ricordando che è $y=3^x$, si ha $3^x=3 \longrightarrow 3^x=3^1 \longrightarrow x=1$.
Da $y=-2$ si ottiene invece $3^x=-2$; questa equazione è impossibile perché per qualunque valore reale di x la potenza 3^x è positiva e pertanto non può mai essere uguale a -2.
Concludiamo che l'unica soluzione dell'equazione proposta è $x=1$.

105 $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=7; \quad 3^{x+1}-\frac{3^x}{9}+3^x=35.$ [2; 2]

106 $3^{x+2}+3^{x+1}+3^x=351; \quad 4^{x-1}+4^x+4^{x+1}=\frac{21}{8}.$ $\left[3;\ -\frac{1}{2}\right]$

107 $3^{x+1}+3^{x-2}+3^{x-1}+3^{x+2}=336; \quad 2^{2x+1}+4^{x-1}+8^{\frac{2}{3}x}=13.$ [3; 1]

108 $3^{2+\sqrt{x}}+3^{1+\sqrt{x}}-3^{\sqrt{x}}=99; \quad 2^{2x-1}+2^{2x+1}=4^x+6.$ [4; 1]

109 $2^x+\frac{2^x}{2}+2^{x-2}+\frac{2^x}{8}+2^{x-4}=62; \quad 9^{4x-1}+2\cdot 9^{4x+1}-81^{2x+\frac{3}{2}}+6.398=0.$ $\left[5;\ \frac{1}{4}\right]$

110 $(9^{x-1})^{2x-1}\cdot 3^{x-2}=\frac{1}{3}; \quad 3\cdot 2^x+2^{x+3}-2^{x-1}-5\cdot 2^{x+1}=\sqrt{2}.$ $\left[\frac{1}{4}\text{ e } 1;\ \frac{3}{2}\right]$

111 $7^{1-x}+7^{2-x}=49^{x+\frac{1}{2}}+49^{x+1}$. (Raccogliere nel 1° membro 7^{-x}, nel secondo 7^{2x}). [0]

112 $3^{x-1}+3^{x+1}-3^{x+2}=3^{2x-2}-2\cdot 9^x$. (Raccogliere nel 1° membro 3^x e nel secondo 3^{2x}...; oppure porre $3^x=y$ da cui $y^2=3^{2x}$...). [1]

113 $3^{2x}-3^x-6=0$. (Porre $3^x=y$...). [1]

114 $4^x-6\cdot 2^x+8=0$ (si noti che $4^x=(2^2)^x=(2^x)^2$...); $9^x+6\cdot 3^x-27=0.$ [1 e 2; 1]

115 $4^x+2^{x+2}-12=0; \quad 3^{2x+1}+26\cdot 3^x-9=0; \quad 2^{2x}+2^{x+1}-8=0.$ [1; −1; 1]

116 $12\left(\frac{4}{9}\right)^x-35\left(\frac{2}{3}\right)^x+18=0; \quad 16\left(\frac{1}{4}\right)^x-10\left(\frac{1}{2}\right)^x+1=0.$ [−2 e 1; 1 e 3]

117 $4^x-2\cdot 2^x+1=0; \quad 4^x+2^{x+1}-24=0; \quad 3\cdot 2^{2x-1}-2^x=4.$ [0; 2; 1]

118 $2\cdot 3^x-9^x=1; \quad (2^x+4)(3^x-9)=0; \quad 9^x-4\cdot 3^{x+1}+27=0.$ [0; 2; 1 e 2]

119 $4^x+2^{x+1}-3=0; \quad 4^{x+2}-5\cdot 2^{x+1}+1=0.$ [0; −1 e −3]

120 $\frac{4^{x+1}-61}{4^{x-2}}=3; \quad 9^{x+1}=\frac{3^{x+2}-3^{x+1}}{2}; \quad \frac{3^{2-x}-3^{1-x}}{9^{x+1}-3^{2x+1}}=27^{1+3x}.$ $\left[2;\ -1;\ -\frac{1}{4}\right]$

121 $\frac{1}{4}\cdot 7^{2-x}=\frac{7}{21+\sqrt{7^x}}; \quad \frac{16+64^{\frac{1}{x}}}{2}=12-8^{\frac{1}{x}}.$ [2; 3]

122 $2^{1-x}+2^{1+x}=4; \quad 100^x-6\cdot 10^x=5(10^x-2).$ [0; 0 e 1]

123 $\frac{3^{2x}+2\cdot 3^x+1}{3^{x+2}-3^x}=\frac{2}{3}; \quad \sqrt{3^x}-9=8\cdot\sqrt[4]{3^x}.$ [±1; 8]

124 $2^{3-x}+2^{x+1}=17; \quad 5^{\sqrt{x}}-\frac{1}{5}+5^{1-\sqrt{x}}=25.$ [3 e − 1; 4]

125 $\frac{1}{4^{1-3x}}+2^{3x+1}=\frac{1}{4^{2-3x}}+2^{3x+3}$. (Porre $2^{3x}=y \longrightarrow 4^{3x}=y^2$...). $\left[\frac{5}{3}\right]$

126 $\frac{2^{2x}}{1+2^x}=1-\frac{2^x}{2^x+1}.$ [0]

127 $2\left(5^x-\dfrac{5^x-1}{5^x+1}\right)=3\cdot 5^x-1.$ $[0]$

128 $\dfrac{1}{4^{2x}+4}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{4^x-2}{2^{4x+1}+8};\quad \dfrac{8-9^x}{1+3^{3-2x}}+\dfrac{1}{4}=0.$ $\left[\dfrac{1}{2};\ 1\right]$

129 $4^{x-1}=5-4^{2-x};\quad (4^{x-1})^{x+1}=8^{x^2-2};\quad 6^{x+1}+6^{x-1}+6^x=\dfrac{43}{6^{x-2}}.$ $\left[1 \text{ e } 2;\ \pm 2;\ \dfrac{3}{2}\right]$

130 $2\cdot 2^{3x}-3\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x+2=0;\quad 27^x-9^x-3^{x+2}+9=0.$ $[\pm 1;\ 0 \text{ e } 1]$

131 $\left(\dfrac{1}{8}\right)^x-\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-4\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+4=0;\quad 2^{3x+1}-7\cdot 4^x+7\cdot 2^x-2=0.$ $[-1 \text{ e } 0;\ \pm 1 \text{ e } 0]$

132 $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{x+1}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x-1}=\dfrac{29}{4}.\ \left(\text{Porre } \left(\dfrac{5}{2}\right)^x=y\ldots\right).$ $[\pm 1]$

133 $81^{x-1}\cdot\sqrt[3]{9^{2-x}}=\dfrac{(3\sqrt[4]{3^{2x-1}})^2}{\sqrt{27^{x+1}}};\quad \dfrac{2^{2x-1}+3}{2^x+1}=2^x-\dfrac{1}{3}.$ $\left[\dfrac{16}{23};\ 1\right]$

134 $(2^{x+1}+2)(9^x-3)=0;\quad (4^x-8)(3^x+81)\left(5^x-\dfrac{1}{25}\right)=0.$ $\left[\dfrac{1}{2};\ -2 \text{ e } \dfrac{3}{2}\right]$

ESERCIZIO SVOLTO

135 $5\cdot 3^{2x-3}=\dfrac{25^x}{9}$

Le basi delle potenze con esponente contenente l'incognita sono diverse: pertanto cerchiamo di ridurre l'equazione alla forma $a^{f(x)}=b^{f(x)}$, portando le potenze di 3 al primo membro e le potenze di 5 al secondo:

$$5\cdot 3^{2x-3}=\frac{25^x}{9}\to 9\cdot 3^{2x-3}=25^x\cdot\frac{1}{5}\to 3^2\cdot 3^{2x-3}=5^{2x}\cdot 5^{-1}\to$$
$$\to 3^{2+2x-3}=5^{2x-1}\to 3^{2x-1}=5^{2x-1} \tag{1}$$

Dividiamo entrambi i membri per $5^{2x-1}\neq 0$, ottenendo

$$\frac{3^{2x-1}}{5^{2x-1}}=1\to\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-1}=1\to\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-1}=\left(\frac{3}{5}\right)^0\to 2x-1=0$$

Dalla (1), che è della forma $a^{f(x)}=b^{f(x)}$ e ricordando che, in generale, $a^{f(x)}=b^{f(x)}\to f(x)=0$, potevamo subito dedurre $2x-1=0\to x=\dfrac{1}{2}$.

136 $4^x\cdot 2^x=27^x;\quad 5^{x+1}=3^{1-x}\cdot 9^x;\quad 27\cdot\dfrac{1}{4^x}=2^{1-x}\cdot 3^{2-x}.$ $[0;\ -1,\ -1]$

137 $\dfrac{2^x\cdot 6^{x+1}}{4}=3^{3x};\quad \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2-3x}=5^x\cdot 3^{2x-3}.$ $\left[\dfrac{1}{2};\ -1\right]$

138 $\dfrac{2^x\cdot 15}{2^3+1}=40\cdot 3^{x-4};\quad 3^{x+1}+3^{x-1}=10^x.$ $[3;\ 1]$

139 $3^x-3^{x-2}=2^x+2^{x+1};\quad 6^x+6^{x+1}+6^{x-1}=\dfrac{43}{25}\cdot 5^{x+1}.$ $[3;\ 1]$

140 $6(3^x+3^{x-1}+3^{x+2})=31(5^x+5^{x-1});\quad \dfrac{2^{-x}+2^{1-x}}{3}=\dfrac{5^{x+2}}{25^{x+1}}.$ $[1;\ 0]$

141 $3^{x+1}+\dfrac{3}{3^{1-x}}=\dfrac{6^{x+2}+6^x}{37}$; $\quad 3^{x-2}\cdot 5^{x-2}=1$; $\quad 3^x=2^x$. [2; 2; 0]

142 $2^x\cdot 5^{2x-3}=\dfrac{1}{2^{x-3}}$; $\quad 2^{2x+4}\cdot 3^x=\dfrac{2}{3^{x+3}}$. $\left[\dfrac{3}{2};\ -\dfrac{3}{2}\right]$

143 $\dfrac{2^x\cdot 15}{2^3+1}=40\cdot 3^{x-4}$; $\quad 8^{x-2}\sqrt[3]{12}=\dfrac{\sqrt[6]{9^{4+x}}}{32\sqrt[3]{81^{1-2x}}}$. $\left[3;\ \dfrac{1}{9}\right]$

144 $2^x+3^x=\dfrac{1}{3}2^x+\dfrac{1}{2}3^x$; $\quad 6^x-3^x-3\cdot 2^x+3=0$. [impossibile; 0 e 1]

145 $3^x-3^{x-2}=2^x+2^{x+1}$; $\quad 3^x=\dfrac{5^{x+1}}{3}$. [3; −1]

146 $9\cdot 3^{2x}=5^{x+1}$; $\quad 2^{2x+4}\cdot 3^x=\dfrac{2}{3^{x+3}}$; $\quad 3^x\cdot 5^{x-2}=9$. $\left[-1;\ -\dfrac{3}{2};\ 2\right]$

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

147 $-5^x=-25 \longrightarrow x=$

a) ☐ -2; b) ☐ impossibile; c) ☐ 2; d) ☐ $-\dfrac{1}{2}$; e) ☐ 5.

148 $-2^x=16 \longrightarrow x=$

a) ☐ -4; b) ☐ impossibile; c) ☐ 4; d) ☐ $\dfrac{1}{4}$; e) ☐ -8.

149 $2^{x^2+2}=8 \longrightarrow x=$

a) ☐ 1; b) ☐ $\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; c) ☐ ± 1; d) ☐ -1; e) ☐ 0.

150 $2^{6x}=8^{x-1}\cdot 16^{1-x} \longrightarrow x=$

a) ☐ $\dfrac{1}{7}$; b) ☐ $\dfrac{3}{4}$; c) ☐ 0; d) ☐ $\dfrac{3}{2}$.

151 $2^x+2^{x-1}+2^{x+3}=19 \longrightarrow x=$

a) ☐ impossibile; b) ☐ 1; c) ☐ 2; d) ☐ -1.

152 $5^x+\sqrt{25^{x+2}}=130 \longrightarrow x=$

a) ☐ -1; b) ☐ 5; c) ☐ impossibile; d) ☐ 1.

153 $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{x+1}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3-x} \longrightarrow x=$

a) ☐ $\dfrac{1}{3}$; b) ☐ nessun valore; c) ☐ -5; d) ☐ 1.

154 $\left(\dfrac{125}{8}\right)^{1-x}=\left(\dfrac{4}{25}\right)^{x+2} \longrightarrow x=$

a) ☐ $-\dfrac{1}{5}$; b) ☐ 7; c) ☐ $\dfrac{5}{4}$; d) ☐ 0.

Sistemi di equazioni esponenziali

ESERCIZIO SVOLTO

155 Risolviamo il sistema $\begin{cases} 2^{2x-y} = 32 \\ 5^{x+y} = 25^{y-3} \end{cases}$

Le due equazioni possono essere ridotte in forma canonica. Si ha quindi

$$\begin{cases} 2^{2x-y} = 2^5 \\ 5^{x+y} = (5^2)^{y-3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^{2x-y} = 2^5 \\ 5^{x+y} = 5^{2y-6} \end{cases}$$

Passando agli esponenti in entrambe le equazioni, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - y = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 17 \end{cases}$$

Risolvere i seguenti sistemi.

156 $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3^{x+y} = 81 \end{cases}$; $\begin{cases} 4^{x+1} \cdot 8^y = 1 \\ 25^x = 5 \cdot 125^{2y} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} ; \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \right]$

157 $\begin{cases} \dfrac{2^{x-1}}{4^{1+y}} = 16 \cdot 8^{x+y} \\ \dfrac{5}{25^{x+y}} = \dfrac{1}{125^{2x}} \end{cases}$; $\begin{cases} \sqrt[3]{2^x} \cdot \sqrt{8^{x-2y}} = 1 \\ \sqrt{3^{x-y}} \cdot \sqrt[5]{9^{1-y}} = 1 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = -\dfrac{19}{24} \\ y = -\dfrac{13}{12} \end{cases} ; \begin{cases} x = 8 \\ y = \dfrac{44}{9} \end{cases} \right]$

158 $\begin{cases} \alpha^{x+3y} = \dfrac{\alpha^2}{\alpha^{2x-y}} \\ \beta^2 \cdot \dfrac{1}{\beta^{x-2y}} = \beta^{3-2y+x} \end{cases}$; $\begin{cases} 7^{1-x} : 49^{2+y} = 1 \\ a^{2x+y} : a^{x-3y} = a^2 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = \dfrac{3}{8} \\ y = \dfrac{7}{16} \end{cases} ; \begin{cases} x = -8 \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases} \right]$

159 $\begin{cases} 81^x = 27 \cdot 3^y \\ \dfrac{1}{25^x} \cdot 125^y = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{m^x}{m^{3y}} = m^4 \\ n^{2x} = \dfrac{n^{15}}{n^y} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} ; \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases} \right]$

160 $\begin{cases} 3^{m-n} = 3 \\ 4^m \cdot 2^n = \dfrac{1}{16} \end{cases}$; $\begin{cases} 8^s \cdot 4^t = 128 \\ 81^t = 27 \cdot 3^s \end{cases}$ $\left[\begin{cases} m = -1 \\ n = -2 \end{cases} ; \begin{cases} s = \dfrac{11}{7} \\ t = \dfrac{8}{7} \end{cases} \right]$

161 $\begin{cases} x + 3^y = 0 \\ x + 9^y = 6 \end{cases}$ (Porre $3^y = z$ e risolvere il sistema in x e z...). $\left[\begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases} \right]$

162 $\begin{cases} 2^{x+1} = 3y \\ 3^{x+1} = 2y \end{cases}$; $\begin{cases} y^2 - 3x = 0 \\ \dfrac{25^x}{125} = 5^y \end{cases}$ $\left[\begin{cases} -2 \\ \dfrac{1}{6} \end{cases} ; \begin{cases} 3 \\ 3 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \dfrac{3}{4} \\ -\dfrac{3}{2} \end{cases} \right]$

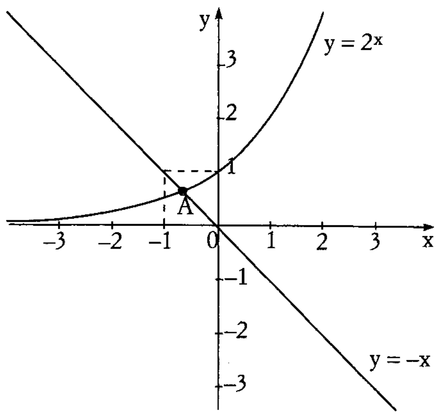
163 $\begin{cases} \sqrt[x]{8}\cdot\sqrt[3x]{4^{y-1}}=\sqrt{2} \\ 3^{x-1}=\sqrt[5]{3^{3x+1}} \end{cases}$; $\begin{cases} 2y-2^x=0 \\ 2y^2+4^{x+1}=9\sqrt{2^{3x-1}} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} 3 \\ -\frac{5}{4} \end{cases} ; \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}\right]$

164 $\begin{cases} 2^{x-2y}=16 \\ 3^{x^2}\cdot 3^{y^2}=81 \end{cases}$; $\begin{cases} 3^{x+5}+27y=28 \\ 9^x-y+2\cdot 3^{2x}=0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \frac{8}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{cases} ; \begin{cases} -2 \\ \frac{1}{27} \end{cases}\right]$

Risoluzione grafica di sistemi ed equazioni

ESERCIZIO SVOLTO

165 Risolviamo graficamente l'equazione $2^x+x=0$.
Ponendo l'equazione data nella forma $2^x=-x$, possiamo notare che essa è l'equazione che risolve il sistema misto $y=2^x \wedge y=-x$; inoltre dal grafico delle due funzioni possiamo ricavare che l'ascissa x_A dell'unico punto di intersezione è compresa tra -1 e 0.
Applicando il metodo di bisezione o quello del punto unito, studiati precedentemente, possiamo determinare gli zeri della funzione $y=2^x+x$ approssimati, per esempio, fino alla terza cifra decimale, ottenendo $x_A=-0{,}641$.



Risolvere graficamente i seguenti sistemi.

166 $\begin{cases} y=3^x \\ y=1-x^2 \end{cases}$; $\begin{cases} y=2^x \\ 3x-y+1=0 \end{cases}$; $\begin{cases} y=x+2 \\ y=3^x \end{cases}$; $\begin{cases} y=5^x \\ x+y=0 \end{cases}$

167 $\begin{cases} y-x=0 \\ y=\left(\frac{3}{2}\right)^x \end{cases}$; $\begin{cases} y=\left(\frac{1}{2}\right)^x \\ 4y-16x+31=0 \end{cases}$; $\begin{cases} y=\left(\frac{1}{5}\right)^x \\ y=4x^2+1 \end{cases}$

168 $\begin{cases} y=\left(\frac{3}{4}\right)^x \\ 4y+x=4 \end{cases}$; $\begin{cases} y=2^x \\ y=x^2+1 \end{cases}$; $\begin{cases} y=4^x \\ xy=32 \end{cases}$

Risolvere graficamente le seguenti equazioni.

169 $2^x-\frac{2}{x}=0.$ $\left(\text{Considerare il sistema } y=2^x \wedge y=\frac{2}{x}\right).$ [1]

170 $2^x=32;\quad 2^{-x}=4.$ [5; −2]

171 $3^x-2x-1=0;\quad 1-2x=3^x.$ [0 e 1; 0]

172 $2^x - 1 = 2x.$ $[0;\ \alpha,\ \text{con } 2 < \alpha < 3\ (\alpha = 2{,}659...)]$

173 $5^x = 1 - x^2.$ $[0;\ \alpha,\ \text{con } -1 < \alpha < 0\ (\alpha = -0{,}867...)]$

174 $2^x + x = 1;\quad 2^x - x = 1;\quad 2^{|x|} = 1 + x.$ $[0;\ 0 \text{ e } 1;\ 0 \text{ e } 1]$

175 $2^x = 1 - x^2.$ $[0 \text{ e } \alpha \text{ con } -1 < \alpha < 0\ (\alpha = -0{,}572...)]$

176 $3^x - 3x^2 = 0.$ $[1 \text{ e } 3 \text{ e } \alpha\,(\alpha = -0{,}450...)]$

177 $4^{-x} = 1 - 3x.$ $[-1 \text{ e } 0]$

178 $3^{-x} - 1 = 3x.$ $[0]$

179 $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{2}{x} = 0;\quad \left(\frac{1}{3}\right)^x + \frac{3}{x} = 0.$ $[-1;\ -1]$

180 $2^x + 3x = x^2 + 4;\quad \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1 = \frac{1}{4}x.$ $[1;\ 0]$

181 $\frac{7}{6}x^2 - \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.$ $[-2;\ 1;\ -4{,}560...]$

182 $(x+2)(1-2x) = x \cdot 2^x + 2^{x+1}$. (Ridurla alla forma $2^x = 1 - 2x...$). $[-2;\ 0]$

183 $x \cdot 2^x + 2x - 2^x + 1 = 0$. (Considerare il sistema $y = 2^x \wedge y = ...$). $[0]$

184 $6x - 2x^2 = 3 - x + x \cdot 3^x - 3^{x+1}.$ $[0;\ 3]$

Disequazioni esponenziali

ESERCIZI SVOLTI

185 La disequazione $$5^x < 25$$
può essere scritta in forma canonica ricordando che è $25 = 5^2$ e si ha così $5^x < 5^2$.
In tale disequazione entrambi i membri sono potenze di 5. Poiché la base è maggiore di 1, possiamo *passare agli esponenti* conservando il verso della disequazione: si ha così $x < 2$.
L'insieme delle soluzioni della disequazione data è pertanto l'intervallo $(-\infty\,;\,2)$.

186 La disequazione $$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$$
si risolve facilmente ricordando che è $1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$; si ha quindi $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^0 \longrightarrow x > 0.$

187 La disequazione $$\left(\frac{2}{3}\right)^x < -2$$
risulta impossibile, perché la potenza $\left(\frac{2}{3}\right)^x$, essendo positiva per qualunque valore dell'esponente x, non può mai essere minore del numero negativo -2. Per lo stesso motivo la disequazione $\left(\frac{2}{3}\right)^x > -2$ è verificata da qualunque valore di x, ossia l'insieme delle sue soluzioni è $\mathbb{R}$.

188 Risolviamo *graficamente* la disequazione $\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \frac{27}{8}$. Essa equivale al sistema misto

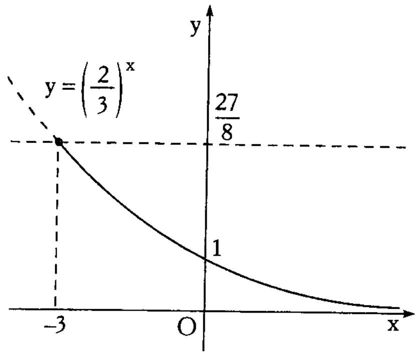
$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad \wedge \quad y \leq \frac{27}{8}$$

Disegniamo il grafico della funzione esponenziale $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$; occorre trovare i punti di tale grafico che si trovano sulla retta $y = \frac{27}{8}$ o al di sotto di essa.

Osserviamo che tale retta interseca il grafico per

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{27}{8} \longrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \longrightarrow x = -3.$$

Dall'esame della figura si ricava che la soluzione della disequazione è $x \geq -3$.



VERO O FALSO

189 $8^x > 0 \longrightarrow x > 0.$ V F

190 $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2 \longrightarrow x > 1.$ V F

191 $2^x > 128 \longrightarrow x > 7.$ V F

192 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} < \frac{9}{4} \longrightarrow x < -1.$ V F

193 $\left(\frac{5}{4}\right)^{1-x} > \left(\frac{16}{25}\right)^x \longrightarrow x > -1.$ V F

194 $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x} < 1 \longrightarrow x > 0.$ V F

195 La disequazione $a^x > b$, essendo $a \in \mathbb{R}^+$ e $b \leq 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$. V F

196 La disequazione $a^x > a$, per ogni $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, è verificata per $x > 1$. V F

Risolvere le seguenti disequazioni sia graficamente sia algebricamente.

197 $3^x > 1; \quad 2^x \leq 1; \quad 3^x > 3; \quad 2^x < 16.$ $[x > 0;\ x \leq 0;\ x > 1;\ x < 4]$

198 $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 1; \quad \left(\frac{1}{5}\right)^x \geq 5; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{4}{9}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x > 4.$ $[x < 0;\ x \leq -1;\ x > 2;\ x < -2]$

199 $3^x \geq \frac{1}{9}; \quad 25^x > 5; \quad 2^x \geq \frac{1}{8}; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x \leq \frac{4}{9}.$ $\left[x \geq -2;\ x > \frac{1}{2};\ x \geq -3;\ x \leq -2\right]$

200 $\left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \frac{27}{8}$; $\quad 1 < 4^x < 16$; $\quad \frac{4}{9} < \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq 1.$ $\quad [x \leq -3;\ 0 < x < 2;\ 0 \leq x < 2]$

201 $\frac{1}{4} < 4^x \leq 1$; $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^x > -1$; $\quad 5^x < -5$; $\quad 3^{x-1} > 9.$
$[-1 < x \leq 0;\ \forall x \in \mathbb{R};\ \text{impossibile};\ x > 3]$

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

202 La disequazione $2^x < k$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}^-$, se è

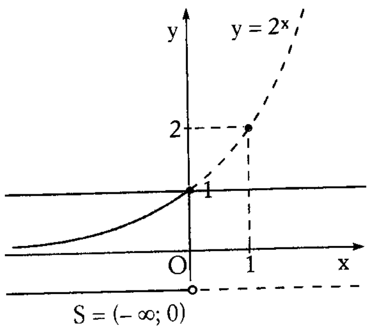
a) ☐ $k = 0$; b) ☐ $k = 1$; c) ☐ $k < 0$; d) ☐ $0 < k < 1$.

203 In figura è rappresentata la risoluzione grafica di una disequazione esponenziale. Qual è la disequazione?

a) ☐ $2^x > 0$; b) ☐ $2^x > 2$;

c) ☐ $2^x < 2$; d) ☐ $2^x < 1$;

e) ☐ $2^x > 1$.

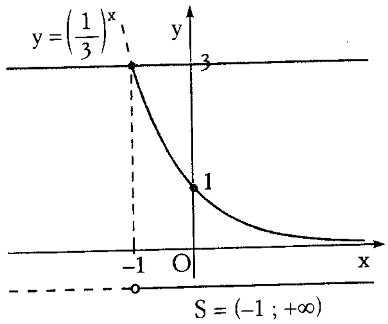


204 In figura è rappresentata la risoluzione grafica di una disequazione esponenziale. Qual è la disequazione?

a) ☐ $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 3$; b) ☐ $\left(\frac{1}{3}\right)^x > -1$;

c) ☐ $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \frac{1}{3}$; d) ☐ $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{3}$;

e) ☐ $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 3$.

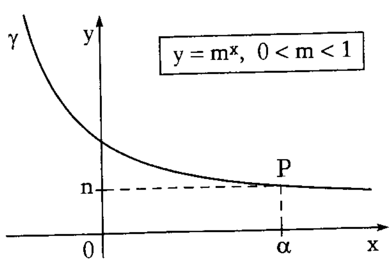


205 Nella figura a fianco è rappresentata la curva esponenziale γ di equazione $y = m^x$, con $0 < m < 1$, ed è $P(\alpha\,;\,n)$ con $P \in \gamma$.
La disequazione $m^x \geq n$ è verificata per

a) ☐ $x \geq 0$; b) ☐ $x > \alpha$;

c) ☐ $x \leq \alpha$; d) ☐ $0 < x \leq \alpha$;

e) ☐ $x < \alpha$; f) ☐ $x \geq \alpha$.



Indicare quali delle seguenti disequazioni sono impossibili, precisandone il perché, e risolvere le altre.

206 $\left(\frac{2}{5}\right)^x < 0;\quad 4^x < 4;\quad 1^{3x} < 1;\quad 1^{x+1} > 2.$

207 $3^{-x} + 3^x \leq 0;\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x} < 0;\quad 2^x + \frac{3}{5} < 0.$

208 $7^{1-x} > 0;\quad 4^{2x} + \left(\frac{1}{4}\right)^x > 0;\quad 2 + \left(\frac{5}{4}\right)^{-x} \leq 0.$

Risolvere le seguenti disequazioni.

ESERCIZI SVOLTI

209 Risolviamo la disequazione $\quad 4^{\frac{x}{2}+1} - 2^{x-1} < 56$

Applicando le note proprietà, cerchiamo di ridurla in forma canonica; si ha quindi

$$2^{2(\frac{x}{2}+1)} - 2^{x-1} < 56 \longrightarrow 2^{x+2} - 2^{x-1} < 56 \longrightarrow 2^x(2^2 - 2^{-1}) < 56 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 2^x\left(4 - \frac{1}{2}\right) < 56 \longrightarrow 2^x \cdot \frac{7}{2} < 56 \longrightarrow 2^x < 16 \longrightarrow 2^x < 2^4 \longrightarrow x < 4$$

210 Risolviamo la disequazione $\quad 4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$

Dopo aver osservato che è $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$, poniamo $y = 2^x$, da cui $y^2 = 4^x$. Otteniamo così una disequazione di secondo grado in y:

$$y^2 - 10y + 16 < 0 \longrightarrow 2 < y < 8$$

Ricordando che è $y = 2^x$, si ottiene

$$2 < 2^x < 8 \longrightarrow 2^1 < 2^x < 2^3 \longrightarrow 1 < x < 3$$

211 Risolviamo $\quad \frac{1}{16} < \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{2}.$

Poiché la funzione esponenziale $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ è decrescente si ha subito

$$\frac{1}{16} < \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{2} \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 < \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1 \longrightarrow 4 > x \geq 1 \longrightarrow 1 \leq x < 4$$

---

212 $2^x \cdot 4 > \frac{1}{4};\quad 3^{x^2} > 81;\quad 3^{1-4x} > 9^{x+1}.$ $\quad\left[x > -4;\ x < -2 \vee x > 2;\ x < -\frac{1}{6}\right]$

213 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \cdot \frac{3}{2} > 1;\quad \left(\frac{4}{5}\right)^{2x-1} \leq \frac{25}{16};\quad \frac{4^x \cdot 16^{x+1}}{8^{x-3}} < 1.$ $\quad\left[x < 3;\ x \geq -\frac{1}{2};\ x < -\frac{13}{3}\right]$

214 $8^{x+2} > 32^{4x+1};\quad \sqrt[3]{16} < 4^{1-x};\quad 3^{x^2+2x} \geq 1.$ $\quad\left[x < \frac{1}{17};\ x < \frac{1}{3};\ x \leq -2 \vee x \geq 0\right]$

215 $\frac{3^{x+1}}{27^{2x}} < \frac{1}{3^{x^2+5}}$; $4\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{8^x}}$; $\sqrt{2^x} \geq 8 \cdot \sqrt[3]{4^{x-1}}$. $\left[2 < x < 3;\ x < -\frac{5}{3};\ x \leq -14\right]$

216 $2^{\frac{2x+4}{x}} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$; $\frac{3^{x-1}}{27^{1-x}} < \frac{9}{3^{2+x}}$; $\sqrt{9^{x+1}} \geq 25 \cdot 5^{2x}$. $\left[x < 0 \vee x > 2;\ x < \frac{4}{5};\ x \leq -1\right]$

217 $\frac{2^x \cdot 15}{2^3(2^3+1)} < 5\left(\frac{1}{3}\right)^{4-x}$; $1 < \left(\frac{2}{5}\right)^x \leq \frac{25}{4}$. $[x > 3;\ -2 \leq x < 0]$

218 $\sqrt[x]{4} > 2$; $\sqrt[x]{2^{1+x}} < \frac{1}{2}$. $[0 < x < 2$, con $x \in ...$ cioè $x = 1$; impossibile$]$

219 $\sqrt[x]{\frac{1}{2}} < \frac{1}{8}$; $3 > \sqrt[x+1]{9}$. [impossibile; $x > 1$, con $x \in ...$]

220 $1 < \sqrt[x]{4} < 2$; $3 < \sqrt[x]{9^{1+x}} \leq 81$. $[x > 2$, con $x \in ...$; $x \geq 1$, con $x \in ...]$

221 $\sqrt[x-1]{\left(\frac{1}{8}\right)^x} < 8$; $\sqrt[3-x]{3} < 9$. $[x > 1$ con $x \in ...$; $x = 0$ e $x = 1$ e $x = 2]$

222 $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} \geq 39$. (Si noti che $3^{x+1} = 3^x \cdot 3^1 ...$). $[x \geq 1]$

223 $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} < 7$; $2^{2x+1} + 4^{x-1} + 4^x < 13$. $[x < 2;\ x < 1]$

224 $3^{x+1} - 3^{x-2} + 3^x \geq 35$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{19}{6}$. $[x \geq 2;\ x < 0]$

225 $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 > 0$. (Porre $2^x = y$ e quindi $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = y^2 ...$). $[x < 0 \vee x > 1]$

226 $8\left(\frac{1}{4}\right)^x - 6\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 > 0$; $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 \geq 0$. $[x < 1 \vee x > 2;\ x \geq 1]$

227 $2 \cdot 3^x - 9^x > 1$; $4^x + 1 > 2^{x+1}$; $4^x - 2^x > 0$. [impossibile; $x \neq 0$; $x > 0$]

228 $3^x(3^x - 1) > 6$; $2^{1-x} + 2^{1+x} > 4$; $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 \leq 0$. $[x > 1;\ x \neq 0;\ 0 \leq x \leq 1]$

229 $\frac{1}{3} < 9^{2x-1} < 27$; $5^x - 4 \geq 5^{1-x}$; $2^x + \frac{4}{2^x} \geq 4$. $\left[\frac{1}{4} < x < \frac{5}{4};\ x \geq 1;\ \forall x \in \mathbb{R}\right]$

230 $4^x - 2^{x+1} + 4 < 0$; $4^x + 3 \cdot 2^x + 2 > 0$. [impossibile; $\forall x \in \mathbb{R}$]

231 $3 \cdot 2^x - 2^{-x} - 2 > 0$; $12\left(\frac{4}{9}\right)^x - 35\left(\frac{2}{3}\right)^x + 18 > 0$. $[x > 0;\ x < -2 \vee x > 1]$

232 $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 \geq 0$; $2^x + 2^{4-x} > 17$. $[x \leq 1 \vee x \geq 3;\ x < 0 \vee x > 4]$

233 $\left(\frac{1}{5}\right)^x - \frac{3}{5} > \frac{2}{5^{1-x}}$; $9^x + 2 \cdot 3^{x+1} - 27 \geq 0$. $[x < 0;\ x \geq 1]$

234 $2^{x+2} + 2^x - 20 \geq 0$; $129 \cdot 2^x - 4^{x+2} - 8 \geq 0$. $[x \geq 2;\ -4 \leq x \leq 3]$

ESERCIZIO SVOLTO

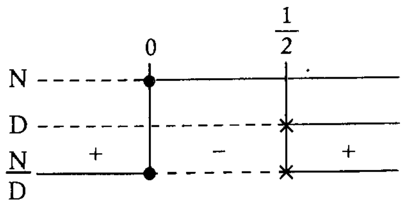
235 Risolvere la disequazione $\dfrac{2^x - 1}{9^x - 3} \le 0$

Il suo dominio è $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore della frazione che si trova al primo membro della disequazione data:

$N = 2^x - 1 > 0 \longrightarrow 2^x > 2^0 \longrightarrow x > 0$

$D = 9^x - 3 > 0 \longrightarrow (3^2)^x - 3 > 0 \longrightarrow 3^{2x} > 3^1 \longrightarrow 2x > 1 \longrightarrow x > \dfrac{1}{2}$



Utilizzando lo schema in figura, possiamo concludere che la disequazione data è soddisfatta per

$$0 \le x < \frac{1}{2}$$

---

236 $\dfrac{2^x}{2^x+1} + \dfrac{2^x}{2^x+4} \le 1; \quad \dfrac{1-3^x}{4^x+2^x-2} < 0.$ $\quad [x \le 1;\ x \ne 0]$

237 $\dfrac{4 \cdot 7^{x-1}}{21+\sqrt{7^x}} \ge 1; \quad \dfrac{3^{x+1} - 3^{x-1}}{2 \cdot 3^x + 3^{2x} + 1} > \dfrac{1}{2}.$ $\quad [x \ge 2;\ -1 < x < 1]$

238 $3^{4x} - 3^{3x} - 7 \cdot 3^{2x} + 3^x + 6 < 0; \quad \dfrac{(0,\overline{6})^{x-1} - 1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2^{x-1}}} < 0.$ $\quad \left[0 < x < 1;\ 1 < x < \dfrac{5}{2}\right]$

239 $\dfrac{2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2}{4 \cdot 3^x - 3^{2x+1} - 1} < 0; \quad \dfrac{1+2^x}{1-2^x} \le 1.$ $\quad [x < -1 \vee -1 < x < 0 \vee x > 1;\ x > 0]$

240 $(2^{x-1} - 1)(3^{2x+1} - 9) \ge 0; \quad 3 - 2^{1-x} - \left(\dfrac{1}{4}\right)^x > 0.$ $\quad \left[x \le \dfrac{1}{2} \vee x \ge 1;\ x > 0\right]$

241 $|2^x - 4| < 4; \quad |2^{2x} - 1| \le 1; \quad |3^x - 3| > 6.$ $\quad \left[x < 3;\ x \le \dfrac{1}{2};\ x > 2\right.$

242 $2^{x+1} < \sqrt{4^x - 5 \cdot 2^x}; \quad \sqrt[x]{9} \ge 3.$ $\quad$ [impossibile; $x = 1 \vee x = 2$

243 $\dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x - 2} + \dfrac{4}{2^x+2} + \dfrac{3 \cdot 4^x - 8}{4 - 4^x} < 0.$ $\quad [x < 1$

244 $\dfrac{1}{8} < \left(\dfrac{1}{4}\right)^{2x-1} < 2; \quad 1 < \sqrt[x]{9} \le 3.$ $\quad \left[\dfrac{1}{4} < x < \dfrac{5}{4};\ x \ge 2,\ \text{con } x \in ...\right.$

245 $\begin{cases} 2^{x+1} < 2 \\ 3^{x^2-1} - 1 < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2^{x+1} + 2^{x-1} < 20 \\ 4^x - 2^x > 2 \end{cases}$ $\quad [-1 < x < 0;\ 1 < x < ...$

246 $\begin{cases} \dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^x - \left(\frac{4}{25}\right)^{-1}}{4^{x+1} - 33 \cdot 2^x + 8} \geq 0 \\ 8 \cdot 3^x + 9 \geq 9^x \end{cases}$; $\begin{cases} 9^x - 3^x - 6 \geq 0 \\ 5^{1-x} + 4 \geq 5^x \end{cases}$ $[x \leq 2 \wedge x \neq -2;\ x = 1]$

247 $\dfrac{(2^x + 2)(2^x - 8)(4^x - \sqrt[3]{2})}{16 - 2^x} \geq 0.$ $\left[x \leq \dfrac{1}{6} \vee 3 \leq x < 4\right]$

248 $\begin{cases} 3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 \leq 0 \\ 2^{2x+1} + 2^x - 2^{x+3} - 4 \geq 0 \end{cases}$ $[x = 2]$

249 $\dfrac{3^x - 1}{16^x - 3 \cdot 2^{2x} + 2} \leq 0$ $\left[x < 0 \vee 0 < x < \dfrac{1}{2}\right]$

250 $8^{x+1} - 14 \cdot 4^x + 7 \cdot 2^x - 1 < 0$ $[x < -2 \vee -1 < x < 0]$

ESERCIZIO SVOLTO

251 $2^{x-2} < 3^{x-2}$

Le basi delle potenze sono diverse e gli esponenti sono uguali: per ridurre l'equazione ugualmente a forma canonica, dividiamo entrambi i membri per 3^{x-2} e, poiché $3^{x-2} > 0$ per qualsiasi valore di x, si otterrà

$$\frac{2^{x-2}}{3^{x-2}} < \frac{\cancel{3^{x-2}}}{\cancel{3^{x-2}}} \rightarrow \frac{2^{x-2}}{3^{x-2}} < 1 \longrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} < 1 \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} < \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

Ora la disequazione è in forma canonica: passiamo agli esponenti, ma, poiché è $\frac{2}{3} < 1$, la disequazione cambia verso:

$$x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$$

252 $\dfrac{5^x}{5} < 4^{x-1}$; $\dfrac{1}{4} \cdot 2^x > 5^{x-2}$ $[x < 1;\ x < 2]$

253 $\sqrt{9^{x+1}} \geq 25 \cdot 5^{2x}$; $\dfrac{1}{3} \cdot 9^x > \dfrac{16^x}{4}$ $\left[x \leq -1;\ x < \dfrac{1}{2}\right]$

254 $4^{2x+1} - 16^{x-1} > 7(3^{2x-1} + 3^{2x})$ $\left[x > \dfrac{3}{2}\right]$

255 $\dfrac{32}{9} \cdot 8^x < 3^{3(x+1)}$; $27 \cdot 2^x < 8 \cdot 3^x$ $\left[x > -\dfrac{5}{3};\ x > 3\right]$

256 $\begin{cases} 6^x + 3^x - 2^x - 1 \leq 0 \\ 27^x - 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 3^x + 6 \leq 0 \end{cases}$ $[x = 0]$

Risolvere graficamente le seguenti disequazioni.

257 $2^x + x > 1$. (Rappresentare su uno stesso grafico le funzioni $y = 2^x$ e $y = 1 - x$...). $[x > 0]$

258 $3^x < 1 - 2x$; $2^x < x + 1$; $2^{-x} - 1 \geq x$. $[x < 0;\ 0 < x < 1;\ x \leq 0]$

259 $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2x+1;\quad \left(\frac{2}{3}\right)^x - 3x \leq 1;\quad 3^x + 3x - 1 < 0.$ $[x < 0;\ x \geq 0;\ x > 0]$

260 $2^{-x} \leq 3x+1;\quad 3^{\frac{x}{2}} < x+1.$ $[x \geq 0;\ 0 < x < 2]$

261 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} > -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}.$ $\left[x < -\frac{1}{2} \vee x > 0\right]$

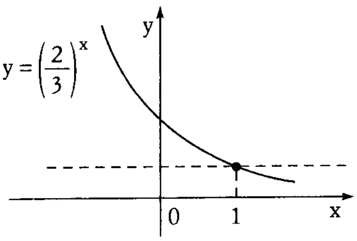
$\Bigg($Può essere utile verificare che le curve $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}$ e $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ passano entrambe per i punti $\left(0\,;\frac{1}{3}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}\,;1\right)\Bigg)$.

262 Dimostrare, applicando la definizione di funzione crescente o descrescente, che sono rispettivamente crescente e decrescente nel loro dominio le funzioni

$$y = 2^{2+x} \quad \text{e} \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$$

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

263 Per risolvere graficamente una data disequazione esponenziale si utilizza il grafico in figura e si ottiene per soluzione $x < 1$. La disequazione è



a) ☐ $\left(\frac{2}{3}\right)^x < 1;$ b) ☐ $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1;$

c) ☐ $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{2}{3};$ d) ☐ $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{2}{3}.$

264 La disequazione $3^{x-2} : 9^{x-2} < 27^x$ è verificata per

a) ☐ nessun valore di x; b) ☐ $x < 2$; c) ☐ $x > 2$;

d) ☐ $x < \frac{1}{2}$; e) ☐ $x > \frac{1}{2}$.

265 $1 < \left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{9}{4} \longrightarrow$

a) ☐ $x > 1$; b) ☐ $-2 < x < 0$; c) ☐ $0 < x < 2$;

d) ☐ $x > -2$; e) ☐ $x > \frac{1}{2}$.

266 $\frac{2}{5} < \left(\frac{2}{5}\right)^x < \frac{25}{4} \longrightarrow$

a) ☐ $x < 2$; b) ☐ $-2 < x < 1$; c) ☐ $1 < x < 2$;

d) ☐ $x > 1$; e) ☐ $0 < x < 2$.

267 $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 < 0 \longrightarrow$

a) ☐ impossibile; b) ☐ $x < -3 \vee x > 9$; c) ☐ $-3 < x < 9$;

d) ☐ $x < 2$; e) ☐ $-1 < x < 2$.

268 $16^x + 6 \cdot 4^x - 16 > 0 \longrightarrow$

a) ☐ $x < -8 \vee x > 2$; b) ☐ impossibile; c) ☐ $x > 2$;

d) ☐ $x > \frac{1}{2}$; e) ☐ $x > -2$.

Esercizi sui domini delle funzioni

Determinare il dominio delle seguenti funzioni.

ESERCIZI SVOLTI

269 $y = \dfrac{2^x}{5^x - 25^x}$.

La funzione data è definita per tutti i valori reali di x eccettuati quelli che annullano il denominatore. Il denominatore si annulla se è

$$5^x - 25^x = 0 \longrightarrow 5^x - 5^{2x} = 0 \longrightarrow 5^x = 5^{2x} \longrightarrow x = 2x \longrightarrow x = 0$$

Dunque la funzione data è definita per tutti i valori di x eccetto $x = 0$. Il suo dominio è quindi $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

270 $y = \dfrac{1}{\sqrt{9^x - 3^x}}$

La radice è di indice pari ed è presente nel denominatore di una frazione; deve essere quindi

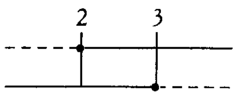
$$9^x - 3^x > 0 \rightarrow (3^2)^x > 3^x \rightarrow 3^{2x} > 3^x \rightarrow 2x > x \rightarrow x > 0$$

Il dominio richiesto è $D = (0\,;\, +\infty)$.

271 $y = \sqrt{2^x - 4} + \sqrt{27 - 3^x}$

Dovrà verificarsi contemporaneamente $2^x - 4 \geq 0$ e $27 - 3^x \geq 0$; pertanto dovremo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2^x - 4 \geq 0 \\ 27 - 3^x \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2^x \geq 2^2 \\ 3^3 \geq 3^x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$$



$\longrightarrow 2 \leq x \leq 3$

Il dominio richiesto è dunque $D = [2\,;\, 3]$.

272 $y = \sqrt{9^x - 27}$; $\quad y = \sqrt{2^{x+2} + 2^x - 20}$. $\quad \left[\left[\frac{3}{2};\ +\infty\right);\ [2;\ +\infty)\right]$

273 $y = \dfrac{5^x}{5^x - 1}$; $\quad y = \dfrac{1}{4^x - 3 \cdot 2^x + 2}$. $\quad [\mathbb{R} - \{0\};\ \mathbb{R} - \{0\,;\, 1\}]$

274 $y=\sqrt{3^x-1}+\sqrt{27-9^x}$. $\left[\left[0\,;\,\frac{3}{2}\right]\right]$

275 $y=\sqrt{1.000-100^x}+\dfrac{1}{10^x-1}$. $\left[(-\infty\,;\,0)\cup\left(0\,;\,\frac{3}{2}\right]\right]$

276 $y=\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-3}-1}$; $\quad y=\sqrt{\dfrac{2}{3^x}-18}$. $[(-\infty\,;\,3];\ (-\infty\,;\,-2]]$

277 $y=\sqrt{1-\dfrac{1+2^x}{1-2^x}}$; $\quad y=\sqrt{3-2^{1-x}-\left(\dfrac{1}{4}\right)^x}$. $[(0\,;\,+\infty);\ [0\,;\,+\infty)]$

278 $y=\sqrt{(2^{x-1}-1)(3^{2x+1}-9)}$. $\left[\left(-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right]\cup[1\,;\,+\infty)\right]$

279 $y=\sqrt{129\cdot 2^x-4^{x+2}-8}$. $[[-4\,;\,3]]$

280 $y=\sqrt{2^x-8}+\sqrt{3^x-81}+\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^5}$. $[\{4\}]$

281 $y=\sqrt{2^{3+2x}+23\cdot 2^x-3}$; $\quad y=\sqrt{5^x-5^{1-x}-4}$. $[[-3;\ +\infty);\ [1;\ +\infty)]$

282 $y=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{5x}-\left(\dfrac{1}{9}\right)^{2x-3}}+\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-2}-\left(\dfrac{4}{9}\right)^x}$. $[\varnothing]$

283 $y=\sqrt[4]{9^x+2\cdot 3^{x+1}-27}$; $\quad y=(2^{x^2}-1)^{-\frac{1}{2}}$. $[[1\,;\,+\infty);\ \mathbb{R}-\{0\}]$

284 $y=(a^{x^2+5}-a^5)^{-\frac{1}{2}}$, $a\in\mathbb{R}-\{1\}$. $\left[\begin{array}{l}0<a<1:\varnothing\\ a>1:\mathbb{R}-\{0\}\end{array}\right]$

285 $y=\sqrt{|2^x-1|-1}+\sqrt{\dfrac{-|x-2|}{x^4-1}}$. $[\{2\}]$

Esercizi di riepilogo

Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni esponenziali.

286 $\dfrac{\sqrt[5]{9^{x-1}}\cdot\sqrt[3]{3^x}}{3\cdot\sqrt{27^{1-x}}}=1$; $\quad 2^{x+1}\sqrt[3]{3^{2x-1}\sqrt{2^x}}=\sqrt{9^x}\cdot\sqrt[6]{2^{2x+1}}$. $\left[\frac{87}{67};\ -1\right]$

287 $\dfrac{8-9^x}{1+3^{3-2x}}+\dfrac{1}{4}=0$; $\quad \dfrac{\sqrt[x+2]{32}}{\sqrt[x]{4}}\cdot(2^{x+1})^{\frac{1}{x}}=\sqrt[x^2+2x]{32}$. $[1;\ 1]$

288 $\dfrac{3^{x+1}+3^{x-2}}{4}=7\cdot\sqrt[5]{9^{x+3}}$; $\quad 18\cdot\left(\dfrac{3^{x+1}}{2}-1\right)=\dfrac{7}{3^x}\cdot 3^{2x+1}$. $\left[\frac{16}{3};\ 1\right]$

289 $28-5^{\frac{4}{x}}=\dfrac{1}{3}(4+\sqrt[x]{25})$; $\quad 8+\sqrt[x]{2^{6-x}}=4(3-\sqrt[x]{2^{3-2x}})$. $[2;\ 3]$

290 $5^x(2-5^x)=1; \quad (2^x-16^{2-3x})^2+(169x^2-64)^2=0.$ $\left[0;\ \frac{8}{13}\right]$

291 $\frac{2^x+1}{2^x-1}-\frac{2^x}{2^x+1}\le\frac{7}{3}; \quad \frac{3^x+1}{3^x-1}-\frac{3^x}{3^x+1}\ge\frac{5}{4}.$ $[x<0 \vee x\ge 1;\ 0<x\le 1]$

292 $\frac{5^{\sqrt{x}+1}-5^{\sqrt{x}-1}}{25^{\sqrt{x}}+1}<\frac{12}{5}; \quad \frac{4^{\sqrt{x}+1}-4^{\sqrt{x}-1}}{16^{\sqrt{x}}+1}<\frac{15}{8}.$ $[x>0;\ x>0]$

293 $\left(\frac{3}{5}\right)^{5x}-\left(\frac{25}{9}\right)^{3-2x}\ge 0; \quad (0,2)^{x-2}-5^{-2x}\le 0.$ $[x\le -6;\ x\le -2]$

294 $3-\frac{1}{2^{x-1}}\ge 4^{-x}.$ $[x\ge 0]$

295 $3^x(2-3^x)<1; \quad |5^x-1|+3\cdot 5^x-3<0.$ $[x\ne 0;\ x<0]$

296 $|4^x+2|+|4^x+1|+2|4^x-2|>7.$ $\left[x>\frac{1}{2}\right]$

297 $|4^x-1|+|4^x-2|+|4^x-3|>6.$ $[x>1]$

298 $4^x+1>\sqrt{16^x+2}; \quad \sqrt{9\left(\frac{4}{9}\right)^x+4}>3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-2.$ $\left[x>-\frac{1}{2};\ \forall x\in\mathbb{R}\right]$

299 $\sqrt{1+2^x}>\frac{1}{\sqrt{2^x-1}}; \quad \frac{x}{1-2^x}\ge 0.$ $\left[x>\frac{1}{2};\ \text{nessun valore di } x\right]$

300 $5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{3x}+3\cdot\left(\frac{4}{25}\right)^x>12\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x-4; \quad \frac{1-3^x}{1-5^x}\ge 0.$ $[x<0\vee x>1;\ x\ne 0]$

Risolvere i seguenti sistemi.

301 $\begin{cases}\sqrt{5^{1-x}}\cdot\sqrt[3]{5^{x+4y}}=25\\ 8\sqrt[4]{2^x}:\sqrt[3]{4^{2+y}}=\sqrt{2}\end{cases}; \quad \begin{cases}2^{x^2-y^2}=128\\ x+y=7\end{cases}$ $\left[\begin{cases}-\frac{5}{2}\\ \frac{13}{16}\end{cases};\ \begin{cases}4\\3\end{cases}\right]$

302 $\begin{cases}2^{x+y}=16\\ 2^{xy}=8\end{cases}; \quad \begin{cases}9^x\cdot 3^y=3\\ (2^{x^2})^4\cdot 2^{y^2}=2^{13}\end{cases}$ $\left[\begin{cases}3\\1\end{cases} \text{ e } \begin{cases}1\\3\end{cases};\ \begin{cases}-1\\3\end{cases} \text{ e } \begin{cases}\frac{3}{2}\\-2\end{cases}\right]$

303 $\begin{cases}3^x-3\left(\frac{2}{3}\right)^y+1=0\\ 3^{x+1}-6\left(\frac{2}{3}\right)^y+\frac{5}{3}=0\end{cases}; \quad \begin{cases}3x=5^y\\ 5x=3^y\end{cases}$ $\left[\begin{cases}-1\\2\end{cases};\ \begin{cases}\frac{1}{15}\\-1\end{cases}\right]$

304 $6x-3=2x^2-x+x\cdot 3^x-3^{x+1}$. (Ridurla alla forma $(x-3)(3^x-\ldots)=0$ e considerare poi il sistema $y=3^x\wedge y=\ldots$). $[0;\ 3]$

305 $7x-2x^2-3-x\cdot 3^x+3^{x+1}=0$. (Osservare che $7x=6x+x$ e poi raccogliere ...). $[0;\ 3]$

Equazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

50 $15+4^x=2^{x+3}$

Si ha

$$15+4^x=2^x\cdot 8 \longrightarrow (2^2)^x-8\cdot 2^x+15=0 \longrightarrow 2^{2x}-8\cdot 2^x+15=0$$

Poniamo $y=2^x$ (da cui $y^2=(2^x)^2=2^{2x}$) e sostituiamo:

$$y^2-8y+15=0 \longrightarrow y=3 \vee y=5$$

Da $y=3$ si ha $2^x=3 \longrightarrow x=\log_2 3$; da $y=5$ si ha $2^x=5 \longrightarrow x=\log_2 5$.

L'equazione data ha dunque due soluzioni.

Si osservi che le equazioni $2^x=3$ e $2^x=5$ si potevano risolvere anche prendendo i logaritmi decimali di entrambi i membri:

$$2^x=3 \longrightarrow \log 2^x=\log 3 \longrightarrow x\log 2=\log 3 \longrightarrow x=\frac{\log 3}{\log 2}$$

$$2^x=5 \longrightarrow \log 2^x=\log 5 \longrightarrow x\log 2=\log 5 \longrightarrow x=\frac{\log 5}{\log 2}$$

L'identità tra tali soluzioni e quelle precedentemente ottenute è garantita dalla formula del cambiamento di base.

51 $3\cdot 2^x+2^{x-1}=3^x$

$$\longrightarrow 2^x\left(3+\frac{1}{2}\right)=3^x \longrightarrow \frac{7}{2}\cdot 2^x=3^x$$

Prendendo i logaritmi decimali di entrambi i membri, si ha

$$\log\left(\frac{7}{2}\cdot 2^x\right)=\log 3^x \longrightarrow \log 7-\log 2+x\log 2=x\log 3 \longrightarrow x\log 2-x\log 3=\log 2-\log 7 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow x(\log 2-\log 3)=\log 2-\log 7 \longrightarrow x=\frac{\log 2-\log 7}{\log 2-\log 3}$$

52 $\dfrac{4^x+2^{2x+1}}{3^x}=3\cdot 5^{2-x}$

Cerchiamo di riscrivere l'equazione in modo che in entrambi i membri siano presenti solo prodotti o quozienti:

$$\frac{2^{2x}+2^{2x}\cdot 2}{3^x}=3\cdot 5^{2-x} \longrightarrow \frac{2^{2x}(1+2)}{3^x}=3\cdot 5^{2-x} \longrightarrow \frac{3\cdot 2^{2x}}{3^x}=3\cdot 5^{2-x}$$

Ora possiamo applicare a entrambi i membri i logaritmi decimali:

$$\log\frac{2^{2x}}{3^x}=\log 5^{2-x} \rightarrow 2x\log 2-x\log 3=(2-x)\log 5 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow x=\frac{2\log 5}{2\log 2-\log 3+\log 5} \longrightarrow x=\frac{\log 25}{\log 4-\log 3+\log 5} \longrightarrow x=\frac{\log 25}{\log 20-\log 3}$$

---

53 $5^{2x-3}=4;\quad 3^x\cdot 2^{1-x}=18.$ $\left[\dfrac{\log 4+3\log 5}{\log 25};\ \dfrac{\log 9}{\log 3-\log 2}\right]$

54 $\dfrac{2^{1-x}\cdot 5}{4^{1-3x}}=1;\quad 2^{x+1}=5^{1-x}.$ $\left[\dfrac{\log 2-\log 5}{5\log 2};\ \log 5-\log 2\right]$

55 $3^{1-x}=16;\quad 25^x=10^{1+x}.$ $\left[1-\log_3 16;\ \dfrac{1}{2\log 5-1}\right]$

256 $21^{x-1} = 15^x; \quad \dfrac{2^{x+1} \cdot 5^{x-1}}{3^x} = 2.$ $\left[\log_{\frac{7}{5}} 21; \ \dfrac{\log 5}{1 - \log 3}\right]$

257 $\dfrac{2^{x-1} \cdot 4^{1+x}}{3} = 6^{1-x}; \quad \dfrac{12^{1-x}}{3^{x+1}} = \dfrac{\sqrt{4^{1+3x}}}{6^{2+x}}.$ $\left[\dfrac{\log 9}{\log 48}; \ \dfrac{\log 72}{\log 48}\right]$

258 $\dfrac{2^{x-1}\sqrt[3]{5}}{\sqrt{10}} = 5^{1+x}.$ $\left[\dfrac{4 \log 5 + 6 \log 2 + 3}{6(\log 2 - \log 5)} = \dfrac{7 + 2 \log 2}{6(\log 2 - \log 5)}\right]$

259 $\dfrac{3^{x-1}}{25}\sqrt{3} = \sqrt{125^x \cdot \sqrt[3]{3^{x-1}}}.$ $\left[\dfrac{2 \log 3 + 12 \log 5}{5 \log 3 - 9 \log 5}\right]$

260 $\dfrac{7^{x+1}}{2^2 + 1} = \sqrt[4]{5^{1+2x}} \cdot 3^{2x-1}.$ $\left[\dfrac{5 \log 5 - 4 \log 3 - 4 \log 7}{4 \log 7 - 2 \log 5 - 8 \log 3}\right]$

261 $a^{1-x} = b^2$, con $a > 0 \wedge a \neq 1, \ b > 0.$ $\left[\dfrac{\log a - 2 \log b}{\log a}\right]$

262 $a^{1-x} = b^2$ con $a > 0, \ a \neq 1, \ b \neq 0.$ $\left[1 - \dfrac{2 \log |b|}{\log a}\right]$

263 $\dfrac{2^x \cdot 15}{1 + 2^3} = 40 \cdot 3^{x-4}.$ [3]

264 $\sqrt[x]{9^{x+1}} : \sqrt[x]{3^{1-x}} = \sqrt{5}.$ $\left[\dfrac{\log 9}{\log 5 - 6 \log 3}\right.$ non è accettabile perché ...$\left.\right]$

265 $3^{\frac{1+x}{3x}} \cdot \sqrt[x]{5^{1-x}} = \dfrac{1}{\sqrt[3x]{9^{1+x}}}.$ $\left[\dfrac{\log 15}{\log 5 - \log 3}\right.$ non è accettabile perché ...$\left.\right]$

266 $\dfrac{10}{2^x} = 3^{1-x} + \dfrac{2}{3^x}; \quad 3^{x-1} + 3^{x+1} = 2^x.$ $\left[-\dfrac{\log 2}{\log 3 - \log 2}; \ \dfrac{\log 3 - 1}{\log 3 - \log 2}\right]$

267 $\dfrac{9^{x+\frac{1}{2}} + 3^{2x-1}}{5^{x+1}} = 2; \quad 5 \cdot 3^{1-x} = \dfrac{36 - 3^{1+x}}{3^{2x}}.$ $\left[\dfrac{\log 3}{\log 9 - \log 5}; \ \dfrac{\log 2}{\log 3}\right]$

268 $3^{x+1} + 4^{1-x} = \sqrt{9^{x-1}} + 2^{3-2x}.$ $\left[\dfrac{\log 3 - \log 2}{\log 3 + 2 \log 2}\right]$

269 $3^{1+2x} + \dfrac{4}{3} = 4 \cdot 3^x; \quad \dfrac{2(2 + 9^x)}{3^x} = 9.$ $\left[\dfrac{\log 2 - \log 3}{\log 3}; \ \dfrac{\log 4}{\log 3} \text{ e } -\dfrac{\log 2}{\log 3}\right]$

270 $\dfrac{32 - 3^x}{5 + 3^{-x}} = \dfrac{9}{2}; \quad 9^x - 3^{x+1} + 2 = 0.$ $\left[2 \text{ e } -\dfrac{\log 2}{\log 3}; \ 0 \text{ e } \dfrac{\log 2}{\log 3}\right]$

271 $1 + 9^{x-1} = \dfrac{8}{3} + 3^{x-1} - 3^{x-2}.$ $[\log_3 5]$

272 $\dfrac{1}{7^x + 1} + \dfrac{7^x}{49^x - 1} = \dfrac{2 \cdot 7^x - 1}{7^x - 1}.$ $\left[-\dfrac{\log 2}{\log 7}\right]$

273 $\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-1} - \left(\dfrac{4}{9}\right)^{x+1}\right] \cdot \dfrac{27}{2} = \dfrac{4^{x-1}}{9^x}.$ $\left[\dfrac{\log 81 - \log 25}{\log 2 - \log 3}\right]$

274 $\dfrac{5^{1-2x}+\sqrt{25^{3-2x}}}{2^{2x-1}+2^{2x-3}}=4; \quad \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-1}=7.$ $\left[log\sqrt{52};\ 1+log_{\frac{2}{3}}7\right]$

275 $2\cdot 3^{1-x}+2^{x+2}=\sqrt{3^{1-2x}}+10\sqrt{4^{x-1}}.$ $\left[\dfrac{log(6-\sqrt{3})}{log\ 6}\right]$

276 $\dfrac{\sqrt[x]{5}-4}{3\sqrt[2x]{5}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt[2x]{5}}.$ $\left[\dfrac{1}{2}log_2 5\right.$ non è accettabile perché ...$\left.\right]$

277 $\sqrt{3^{x-1}}+7\cdot 2^{x+1}=\dfrac{2^{x+1}\sqrt{3^x}}{\sqrt{3\cdot 4^{x-2}}}.$ $\left[\dfrac{log\ 4+log\ 3}{log\ 3-log\ 4}\right]$

278 $3^x+5\cdot 3^{x+1}=2^{2x-1}.$ $\left[\dfrac{5\ log\ 2}{2\ log\ 2-log\ 3}\right]$

279 $3^x+\dfrac{6}{3^x}=\dfrac{29}{3}; \quad 4^{x-2}=5.$ $\left[2\text{ e }\dfrac{log\ 2-log\ 3}{log\ 3};\ 2+log_4 5\right]$

280 $3^{1+x}-7^{2-x}=3\cdot 7^{1-x}-2\cdot 3^{x+2}.$ $\left[\dfrac{1-log\ 3}{log\ 3+log\ 7}\right]$

281 $9^{x-1}+2\cdot 5^{1-2x}=3^{2x-3}+25^{1-x}.$ $\left[\dfrac{log\ 81+log\ 5-log\ 2}{2\ log\ 15}\right]$

282 $5\cdot 3^{1-x}=\dfrac{36-3^{x+1}}{3^{2x}}+2; \quad 3\cdot 8^x=3^x.$ $\left[1\text{ e }log_3 6;\ \dfrac{ln\ 3}{ln\ 3-ln\ 8}\right]$

283 $\dfrac{5^x-4}{5^x-1}+\dfrac{4}{25^x-5^x}=0; \quad 3^x\cdot 4=5\cdot 7^{x+1}.$ $\left[log_5 2;\ \dfrac{ln\ 35-ln\ 4}{ln\ 3-ln\ 7}\right]$

284 $\dfrac{2}{4^x-4}-\dfrac{1}{4^x-2^{x+1}}+\dfrac{2^x-4}{2^{2x}+2^{x+1}}=0.$ $[log_2 3]$

285 $\dfrac{1}{3^x}(2+3^x)+\dfrac{4}{1+2\cdot 3^{-x}}=4.$ $\left[\dfrac{log\ 2}{log\ 3}\right]$

286 $\dfrac{2}{1-3^x}+\dfrac{6}{9^x-1}+\dfrac{2}{3^x+1}=\dfrac{1}{1+3^{-x}}.$ $[log_3 2]$

287 $5\cdot 3^{1-x}-\dfrac{4-3^{x-1}}{9^{x-1}}=2.$ $\left[1;\ \dfrac{log\ 6}{log\ 3}\right]$

288 $4^{2-x}-5^{x-1}=5^{x+1}-\dfrac{1}{2^{2x+1}}.$ $\left[\dfrac{log\ 165-log\ 52}{log\ 5+log\ 4}\right]$

289 $\dfrac{\sqrt{2^{x-2}}+\sqrt{2^{4-x}}+4}{\sqrt{2^{6-x}}+\sqrt{2^{x-2}}}=\dfrac{7}{4}.$ $\left[4;\ \dfrac{2(log\ 20-log\ 3)}{log\ 2}\right]$

290 $\sqrt{49^{x+1}}+7^{x-1}=5^x.$ $\left[\dfrac{log\ 7-log\ 5-1}{log\ 7-log\ 5}\right]$

291 $\dfrac{1-2^{x+1}}{2^x}+\dfrac{3+6\cdot 2^x}{2^x+2}=\dfrac{11}{4^x+2^{x+1}}.$ $\left[\dfrac{log\ 3-log\ 2}{log\ 2}\right]$

292 $\sqrt[x]{81}-\sqrt[x]{9}=3^{\frac{x+2}{x}}-4.$ $\left[\dfrac{2\ log\ 3}{log\ 2}\right.$ non è accettabile perché ...$\left.\right]$

293 $2^{x-4}-\frac{13}{5}\cdot 5^{x-3}=\frac{1}{3}\cdot 2^{x}-\frac{52}{3}\cdot 5^{x-4}$. [4]

294 $4^{x}-2^{x+3}+15=0;\quad 14^{x-1}=7^{x+1}$. $\left[\log_2 3 \text{ e } \log_2 5;\ \frac{\ln 98}{\ln 2}\right]$

295 $9^{x}-11\cdot 3^{x}+28=0;\quad 3\cdot 4^{2x}-13\cdot 4^{x}+4=0$. $[\log_3 7 \text{ e } \log_3 4;\ 1 \text{ e } -\log_4 3]$

296 $\frac{3^{x-1}\cdot 4^{x+1}}{5^{x}}=2;\quad 3^{x}+3^{x+1}=4^{x}$. $\left[\frac{\ln 3-\ln 2}{\ln 12-\ln 5};\ \frac{\ln 4}{\ln 4-\ln 3}\right]$

297 $3\cdot 2^{x}+5^{x+1}=8\cdot 5^{x}-2^{x+1}$. $\left[\frac{\ln 5-\ln 3}{\ln 5-\ln 2}\right]$

298 $2^{x+2}+4^{x+1}-4^{x+3}=2^{x};\quad 8^{x}=4^{x-3}\cdot 3$. $\left[-\frac{\ln 20}{\ln 2};\ \frac{\ln 3-6\ln 2}{\ln 2}\right]$

299 $4+2\cdot 9^{x}=3^{x+2};\quad \frac{2+3^{x}}{3^{x}}+\frac{4\cdot 3^{x}}{3^{x}+2}=4$. $\left[\frac{\ln 4}{\ln 3} \text{ e } -\frac{\ln 2}{\ln 3};\ \frac{\ln 2}{\ln 3}\right]$

300 $12^{x}-3\cdot 4^{x}-5\cdot 3^{x}+15=0$. $[1;\ \log_4 5]$
(Osservare che è $12^{x}=3^{x}\cdot 4^{x}$ e poi raccogliere parzialmente...)

301 $6^{x}-3^{x+1}-5\cdot 2^{x}+15=0$. (Vedi esercizio precedente) $[\log_2 3;\ \log_3 5]$

Tenendo presente l'esempio 3 del paragrafo 15, risolvere le seguenti equazioni.

302 $x^{2x-1}=1$. $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$

303 $x^{2x+4}=1$. $[-2;\ -1;\ 1]$

304 $x^{2x}=x^{-x};\quad x^{3x}=x^{2x}$. $[1;\ 1]$

305 $x^{-x}-x^{-2x}=0;\quad x^{x}+x^{-x}-2=2(x^{-x}-1)$. $[1;\ \pm 1]$

Disequazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali (i risultati si possono presentare anche in forma diversa da quella indicata nelle risposte).

ESERCIZI SVOLTI

306 $5^{x}<20$ (1)

Prendiamo i logaritmi, per esempio in base 5, di entrambi i membri. Si ottiene

$$\log_5 5^{x}<\log_5 20 \longrightarrow x<\log_5 20$$

La disequazione (1) naturalmente si può risolvere anche considerando i logaritmi in qualunque altra base di entrambi i membri; ad esempio, utilizzando i logaritmi decimali si ottiene

$$\log 5^{x}<\log 20 \longrightarrow x\log 5<\log 20 \longrightarrow x<\frac{\log 20}{\log 5}=\log_5 20$$

307 $2^x < 4 \cdot 3^x$

Consideriamo i logaritmi naturali di entrambi i membri, ottenendo

$$2^x < 4 \cdot 3^x \longrightarrow \ln 2^x < \ln(4 \cdot 3^x) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow x \ln 2 < \ln 4 + x \ln 3 \longrightarrow x(\ln 2 - \ln 3) < \ln 4$$

Poiché la funzione logaritmica in base e è crescente, risulta $(\ln 2 - \ln 3) < 0$ e quindi si ha

$$x > \frac{\ln 4}{\ln 2 - \ln 3} \simeq -3,42$$

308 $2^{x+1} \geq 5^{1-x}; \quad 3^{x+2} < 4^{2x+1}.$ $\left[x \geq \log\frac{5}{2};\ x > \frac{\ln 9 - \ln 4}{\ln 16 - \ln 3}\right]$

309 $\frac{2^{x-1} \cdot 4^{1+x}}{6^{1-x}} < 3; \quad 3^{x-1} > \frac{4^{x+1}}{5}.$ $\left[x < \frac{\ln 9}{\ln 48};\ x < \frac{\ln 12 - \ln 5}{\ln 3 - \ln 4}\right]$

310 $\frac{3^x \cdot 5}{2^{x-1}} \leq 10^x; \quad 5^{2x} > 10^{x+1}.$ $\left[x \geq \frac{1}{1 + \log 2 - \log 3};\ x > \frac{1}{2\log 5 - 1}\right]$

311 $2^{2x+1} \geq 5^{1-x}; \quad 5^{\frac{x}{2}} - 4^x > 0.$ $\left[x \geq \frac{\ln 5 - \ln 2}{\ln 5 + \ln 4};\ x < 0\right]$

312 $5^x < 3 \cdot 7^x; \quad 3^{2x} < 5^{3-x}$ $\left[x > \frac{\log 3}{\log 5 - \log 7};\ x < \frac{\log 125}{\log 45}\right]$

313 $5^{1-x} < 3^{2x}; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} > 4^x.$ $\left[x > \frac{\log 5}{\log 45};\ x < 0\right]$

314 $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} < 5^x; \quad 9^x \cdot 2^{x+1} < 6.$ $\left[x > -\frac{\log 4 - \log 3}{\log 20 - \log 3};\ x < \frac{\log 3}{\log 18}\right]$

315 $7^{1-x} > \frac{4^x}{2}; \quad 2^x < 3 \cdot 7^{x+1}.$ $\left[x < \frac{\log 14}{\log 28};\ x > \frac{\log 21}{\log 2 - \log 7}\right]$

316 $\frac{3^x \cdot 4}{2^{x-1}} < 1; \quad \frac{3^x \cdot 5^{1-x}}{2^{1+x}} < 10.$ $\left[x < \frac{\log 8}{\log 2 - \log 3};\ x > \frac{\log 4}{\log 3 - 1}\right]$

317 $15^{x+1} > \frac{3^{2x}}{5^{x-1}}; \quad \frac{16^{1-x}}{3 \cdot 5^{1+x}} \geq \frac{1}{5} \cdot 3^{2x-1}.$ $\left[x > \frac{\log 3}{\log 3 - \log 25};\ x \leq \frac{\log 16}{\log 720}\right]$

ESERCIZIO SVOLTO

318 $7^{x+1} + 7^{x-1} < 5^x$

Cerchiamo di trasformare il primo membro in un prodotto:

$$7^{x+1} + 7^{x-1} < 5^x \longrightarrow 7^x \cdot 7 + 7^x \cdot \frac{1}{7} < 5^x \longrightarrow 7^x\left(7 + \frac{1}{7}\right) < 5^x \longrightarrow 7^x \cdot \frac{50}{7} < 5^x$$

Possiamo ora applicare i logaritmi in base 10 a entrambi i membri della disequazione, conservandone il verso:

$$\log\left(7^x \cdot \frac{50}{7}\right) < \log 5^x \rightarrow x \log 7 + \log 50 - \log 7 < x \log 5 \rightarrow x(\log 7 - \log 5) < \log 7 - \log 50$$

da cui, essendo $\log 7 - \log 5 > 0$, si ha $\quad x < \frac{\log 7 - \log 50}{\log 7 - \log 5}$

319 $7^{1+x} \geq 1 + 7^{x-1}$; $3^{x+1} - 2^{x-1} > 3^x$. $\left[x \geq \dfrac{ln\,7 - ln\,48}{ln\,7};\ x > \dfrac{ln\,4}{ln\,2 - ln\,3}\right]$

320 $64 - 2 \cdot 3^x > 45 + 3^{2-x}$; $5 \cdot 3^{1+x} + 6^{1-x} > 0$. $\left[-\dfrac{log\,2}{log\,3} < x < 2;\ \forall x \in \mathbb{R}\right]$

321 $25^x - 13 \cdot 5^x + 30 \geq 0$. $\left[x \leq \dfrac{log\,3}{log\,5} \vee x \geq \dfrac{1}{log\,5}\right]$

322 $2 \cdot 5^x + 4 \cdot 5^{3-x} < 205$; $4 \cdot 2^x + 9 \cdot 2^{-x} > 12$. $\left[1 - \dfrac{log\,2}{log\,5} < x < \dfrac{2}{log\,5};\ x \neq log_2 3 - 1\right]$

323 $2(3^x - 2)^2 - 3(3^x - 2) + 1 < 0$ (porre $3^x - 2 = y$...) $[log_3 5 - log_3 2 < x < 1]$

324 $4^x - 6 \cdot 10^x + 9 \cdot 25^x > 0$.
(Il primo membro è il quadrato di $(2^x - ...)$...) $\left[x \neq \dfrac{log\,3}{log\,2 - log\,5}\right]$

325 $2^{2x-1} - 5^x \geq 3 \cdot 5^{x+1}$. $\left[x \leq -\dfrac{log\,32}{log\,5 - log\,4}\right]$

326 $2 \cdot 9^x \geq 3^{x+2} - 10$. $[x \leq log_3 2 \vee x \geq log_3 5 - log_3 2]$

327 $3^x - 5 \cdot 3^{1-x} \leq 2$; $7^{x+1} + 7^{x-1} < 7$. $[x \leq log_3 5;\ x < 2 - log_7 50]$

328 $6^{x+1} + 6^x + 6^{x-1} < 6$; $9^x - 10 \cdot 3^x + 25 \geq 0$. $[x < 2 - log_6 43;\ \forall x \in \mathbb{R}]$

329 $4^x - 2^{x+1} + 1 < 0$; $1 + \dfrac{1}{4} 9^x \leq 3^x$. [impossibile; $x = log_3 2$]

330 $3 - 3^{x+1} < 5^x - 15^x$. $[0 < x < log_5 3]$

ESERCIZIO SVOLTO

331 $\dfrac{4^{x-2} - 5}{9^x - 3} < 0$

È una disequazione frazionaria che perde significato per

$$9^x - 3 = 0 \longrightarrow 3^{2x} = 3 \longrightarrow 2x = 1 \longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Quindi C.A.: $x \neq \frac{1}{2}$.

Dobbiamo determinare il segno del numeratore e del denominatore

$$N > 0 \longrightarrow 4^{x-2} - 5 > 0 \longrightarrow 4^{x-2} > 5 \longrightarrow (x-2)\log 4 > \log 5 \rightarrow x \log 4 > \log 5 + 2 \log 4 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow x > \frac{2 \log 4 + \log 5}{\log 4} \longrightarrow x > 2 + \frac{\log 5}{\log 4}$$

$$D > 0 \longrightarrow 9^x - 3 > 0 \longrightarrow 3^{2x} > 3 \longrightarrow 2x > 1 \longrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Poiché è $\log 5 > 0$ e $\log 4 > 0$, è $\dfrac{\log 5}{\log 4} > 0$ e, pertanto, $2 + \dfrac{\log 5}{\log 4} > 2$ e, a maggior ragione, $2 + \dfrac{\log 5}{\log 4} > \dfrac{1}{2}$.

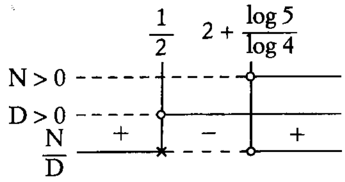
Si ha così lo schema ausiliario riportato nella pagina seguente.

Da esso si deduce che la frazione data è negativa per

$$\frac{1}{2} < x < 2 + \frac{log\,5}{log\,4}$$

La disequazione data è verificata quindi nell'intervallo

$$\left(\frac{1}{2}\,;\,2 + \frac{log\,5}{log\,4}\right)$$



332 $\dfrac{5^x - 10}{5^x - 5} > 0;\quad \dfrac{9^x - 1}{3^x - 4} \leq 0.$ $\left[x < 1 \vee x > \dfrac{1}{log\,5};\; 0 \leq x < log_3 4\right]$

333 $\dfrac{2^x - 5}{2^x + 5} < \dfrac{2^x + 5}{2^x - 5};\quad \dfrac{3^{2x+1} + 40}{3^x} < 34.$ $[x > log_2 5;\; log_3 4 - 1 < x < log_3 10]$

334 $\dfrac{2^x(3 \cdot 2^x - 5) + 2}{1 - 3^x} > 0;\quad \dfrac{2^x - 4^x - 1}{3^{-x} - 25 \cdot 3^x} < 0.$ $\left[x < 1 - log_2 3;\; x < \dfrac{log\,5}{log\,3}\right]$

335 $\dfrac{4^x - 3^x}{9^x - 2 \cdot 3^x} > 0;\quad 3 - 3^{x+1} < 5^x - 15^x.$ $\left[x < 0 \vee x > \dfrac{log\,2}{log\,3};\; 0 < x < \dfrac{log\,3}{log\,5}\right]$

336 $\dfrac{3^{x-1} + 2^{2x}}{4^x - 3 \cdot 2^{x+1} - 7} \leq 0.$ $\left[x < \dfrac{log\,7}{log\,2}\right]$

Equazioni logaritmiche

QUESITI

1. Quando un'equazione si dice logaritmica?
2. Che cosa s'intende per condizione di accettabilità delle soluzioni di un'equazione logaritmica?
3. Come si può accertare l'accettabilità delle soluzioni di un'equazione logaritmica?

VERO O FALSO

337 $log_x x = 1$ è un'equazione indeterminata. V F

338 L'equazione $log_x x = 1$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}^+$. V F

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

339 Il dominio dell'equazione $\dfrac{log(2x-1) + 2\,log\,x}{log(2x - x^2)} = 1$ è

a) ☐ $\left(\frac{1}{2}\,;\,2\right)$; b) ☐ $\left(\frac{1}{2}\,;\,1\right) \cup (1\,;\,2)$;

c) ☐ $(0\,;\,1)$; d) ☐ $\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}\,;\,1\right) \cup (1\,;\,2)$.

340 Il dominio dell'equazione $\log_3(x-2)+\log_3(x^2-1)+\log_{(x-2)}3=1$ è

a) ☐ $(2\,;\,+\infty)$; b) ☐ $(2\,;\,3)\cup(3\,;\,+\infty)$;

c) ☐ $(3\,;\,+\infty)$; d) ☐ $(-\infty\,;\,-1)\cup(2\,;\,+\infty)$.

Risolvere le seguenti equazioni.

ESERCIZI SVOLTI

341 $\log_3(2x+4)=2$ (1)

Determiniamo dapprima le condizioni di accettabilità dell'equazione:

$$2x+4>0 \longrightarrow x>-2$$

Risolviamo ora la (1); per definizione di logaritmo si ha

$$\log_3(2x+4)=2 \longrightarrow 2x+4=3^2 \longrightarrow 2x=5 \longrightarrow x=\frac{5}{2}$$

Essendo $\frac{5}{2}>-2$, la soluzione trovata è accettabile.

342 $\log_x 27=-\frac{3}{2}$

Dovrà essere $x>0 \wedge x\neq 1$, essendo x la base di un logaritmo. Per definizione di logaritmo possiamo scrivere

$$\log_x 27=-\frac{3}{2} \longrightarrow 27=x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 \longrightarrow 3=\frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{3} \longrightarrow x=\frac{1}{9}$$

Osserviamo che la soluzione trovata è accettabile.

343 $\log_x 16=-\frac{4}{3}$; $\log_{\frac{1}{2}} x=\frac{3}{4}$; $\log_{27} x=-\frac{2}{3}$. $\left[\frac{1}{8};\ \sqrt[4]{\frac{1}{8}};\ \frac{1}{9}\right]$

344 $2\log_{\frac{2}{3}}(x-1)=-2$; $\log_3(3x-4)=2$. $\left[\frac{5}{2};\ \frac{13}{3}\right]$

345 $\log_6(2x-3)=0$; $\log_2(x^2+3x+4)=2$. $[2;\ 0 \text{ e } -3]$

346 $\log_{\frac{4}{3}}(x^2-x+1)=-1$; $2\log_3 x=\log_2\frac{1}{8}$. $\left[\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{9}\right]$

347 $\log(x+1)=2\log 2$; $\log_3(\sqrt{x-2}-1)=0$. $[3;\ 6]$

348 $\log_x(2x-1)=2$; $\log_{\sqrt{2}} x=6$; $\log_{\sqrt{3}} x=-4$. $\left[\text{impossibile};\ 8;\ \frac{1}{9}\right]$

349 $\log_{\frac{3}{4}} x=1$; $\log_2(x-1)=-3$. $\left[\frac{3}{4};\ \frac{9}{8}\right]$

350 $\frac{1}{2}\log(x^2-1)=-2$; $4\log_5 x=3\log_5 16$. $[\pm\sqrt{1+10^{-4}};\ 8]$

351 $\log_{\frac{1}{2}}(x-\sqrt{1-x^2})=0$; $\log_x(x^2-x)=1$. $[1;\ 2]$

352 $3 \log x = \log 8; \quad 2 \log x = \log 4.$ [2; 2]

353 $\log_{x^2} 81 = 2; \quad \log_x(x^2+4x-5) = 2.$ $\left[\pm 3; \ \frac{5}{4}\right]$

354 $\log(x - \sqrt{x+1}\,) = 0; \quad \log|x-2| = 0.$ [3; 1 e 3]

ESERCIZIO SVOLTO

355 $2\log_3 x - \log_3(x-2) + 1 = \log_3(2x+1)$ (1)

C.A.: $x > 2$

L'equazione (1) si può ridurre nella forma

$$2 \log_3 x + 1 = \log_3(2x+1) + \log_3(x-2)$$

Riducendo a forma canonica e sostituendo 1 con $\log_3 3$, otteniamo

$$\log_3(x^2 \cdot 3) = \log_3[(2x+1)(x-2)]$$

e, passando agli argomenti, si ha l'equazione intera di secondo grado

$$3x^2 = (2x+1)(x-2) \rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \vee x = -1$$

Le soluzioni non verificano le C.A. e quindi non sono accettabili.

Verifichiamo l'accettabilità delle soluzioni, anche sostituendole negli argomenti dei logaritmi presenti nella (1).

Vediamo subito che l'argomento del termine $2\log_3 x$ risulta negativo sia per $x = -2$ sia per $x = -1$; pertanto è inutile proseguire nella sostituzione: nessuna delle due soluzioni è accettabile.

L'equazione data è quindi impossibile.

Attenzione!

Se avessimo stabilito le C.A. dell'equazione (1) dopo averla ridotta a forma canonica, avremmo ottenuto erroneamente

$$\begin{cases} 3x^2 > 0 \\ (2x+1)(x-2) > 0 \end{cases} \longrightarrow x < -\frac{1}{2} \vee x > 2$$

356 $2 \log(x+3) = \log(x-1) + 4 \log 2; \quad \log_4(x+6) + \log_4 x = 2.$ [5; 2]

357 $\log x + \log(x+3) = 1; \quad \log x + \log(x-2) = \log(9-2x).$ [2; 3]

358 $2 \log_{\frac{2}{3}} x + \log_{\frac{2}{3}} 3 = \log_{\frac{2}{3}}(5x-2).$ $\left[1; \ \frac{2}{3}\right]$

359 $\log_3(x^2+x) - \log_3(x^2-x) = 1; \quad \log_5(x^2-4) - \log_5(x+2) = 2.$ [2; 27]

360 $2 \log x - \log(x-1) = 2 \log 2; \quad 2 + \log_2 x = \log_2 7.$ $\left[2; \ \frac{7}{4}\right]$

361 $\log_6(9x^2-1) - \log_6(3x-1) = 1; \quad 2 \log_2 x = 2 + \log_2(x-1).$ $\left[\frac{5}{3}; \ 2\right]$

362 $\log(10-2x) = \log(5-x) - \log 4.$ [non ha soluzioni; perché?]

363 $\log_2 x - \log_2(x+4) + 1 = 0; \quad \log(x-16) = \log 105 - \log x.$ [4; 21]

364 $2 \log x - \log(2x+1) + \log 3 = \log(x-2).$ [impossibile]

365 $\log_2(3x+1) - \log_2(x+2) + 2 = \log_2(9x-4) - \log_2 x.$ $\left[2;\ \frac{4}{3}\right]$

366 $\log(x^3 - x^2 - 2x) = \log(x+\sqrt{2}) + \log(x-\sqrt{2}) + \log(x-2).$ [impossibile]

367 $\log(4x-1) - \log(3x-1) = \log(1+x) - \log(1-x).$ $\left[\frac{3}{7}\right]$

368 $\frac{1}{3}\log(x^3 - 8x + 5) = \log(x-1).$ [3]

369 $\log 3 + \frac{1}{2}\log(x^2-2) = \log(6-x^2).$ $[\pm\sqrt{3}]$

370 $\frac{1}{2}\log(x-\sqrt{5}) = \log(7-x^2) - \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{5}).$ $[\sqrt{6}]$

371 $\log 5 - \log(3+\sqrt{x}) = \log(3-\sqrt{x}).$ [4]

372 $\log(1-x) - \log(1+x) + \frac{1}{2}\left\{\log(1+2x) - \log(1-2x)\right\} = 0.$ [0]

373 $\log_3 x + \log_3(x+1) = \log_3(x^2-x) + 1.$ [2]

374 $\frac{1}{2}\log(x+8) - \log 12 = 2\log 5 - 2.$ [1]

375 $\frac{1}{5}\log(x+2) = 3 + \log 0{,}002;$ $\quad \log x + \log(x+3) = 1.$ [30; 2]

376 $\frac{1}{2}\log(9-x) = \log 3 + \frac{1}{2}\log x.$ $\left[\frac{9}{10}\right]$

377 $\frac{1}{2}\log(1+5x) = \log(1+\sqrt{3x});$ $\quad \frac{1}{4}\log_8(x^4+2x-6) = \log_8 x.$ [0 e 3; 3]

378 $\frac{1}{2}\log(x+20) = \log 2 + \frac{1}{4}\log(x+20).$ [−4]

379 $\log x + \log(2x-1) = \log(2x+5) + \log 3.$ [5]

380 $\frac{3}{4}\log 2 + \frac{1}{4}\log(5x+2) = \log 4.$ [6]

381 $\log x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) = \log(4-x) - \frac{1}{2}\log(x^2-8x+17).$ [2]

382 $\log(2x+11) - \log(x+4) - \log 2 = \log(1-3x) - \log(1-x).$ $\left[-3;\ -\frac{1}{4}\right]$

383 $\log(1-\sqrt{x+2}) = \frac{1}{2}\log(3x+7).$ [−2]

384 $\frac{1}{2}\log_a(16-x) = \log_a(x-4).$ $[a > 0 \wedge a \neq 1 : 7]$

385 $1+\log(x+1)=\log 15; \quad \log_3(x-2)+2=\log_3(6x).$ $\left[\frac{1}{2};\ 6\right]$

386 $\log(x+\sqrt{x})-\log(x-\sqrt{x})=\log 6-\frac{1}{2}\log x.$ $[4;\ 9]$

387 $\frac{1}{2}[\log(\sqrt{2}x-1)+\log(\sqrt{2}x+1)]=\log(x^2+1)-\frac{1}{2}[\log(x-1)+\log(x+1)].$ $[\sqrt{5}]$

388 $\log 2+\frac{1}{2}[\log x+\log(2-x)]-2\log(x-1)=\frac{1}{2}\log 3-\log(1-x)^2.$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

389 $\log(\sqrt{1+x}+1)=\frac{1}{2}\log(1+x+\sqrt{1-x}).$ $\left[-\frac{24}{25}\right]$

390 $\frac{1}{2}[\log(2x-3)-\log(x-2)]=\log(2+\sqrt{x-2})-\log 2-\frac{1}{2}\log(x-2).$ $\left[\frac{114}{49}\right]$

391 $\frac{1}{2}\log_3(3x+\sqrt{6x-1})=\log_3(2x+1)-\frac{1}{2}\log_3(3x-\sqrt{6x-1}).$ $[2]$

392 $\log(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})-\log(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})=\log x-\log 2.$ $[2]$

393 $\log_5 7-\log_5(3\sqrt{x+3}+1)=1-\log_5(3\sqrt{x+3}-1).$ $[1]$

394 $\frac{1}{2}\log_2(3x+2)=\log_2 x+\frac{1}{2}.$ $[2]$

395 $\log(\sqrt{2x+3}-1)-\log 2=\log 3-\frac{1}{2}\log(2x+3).$ $[3]$

396 $\log x+\log\frac{x+3}{10}=0; \quad \frac{1}{2}\log_8(x+\sqrt{x-4})=\frac{1}{3}.$ $[2;\ 4]$

397 $\log_2(x-2)+\log_2(6-x)=2; \quad 1+\log x=2\log 5.$ $\left[4;\ \frac{5}{2}\right]$

398 $\log_3 x-\log_3(2x-1)=2; \quad \log(x-1)-\log(2x)=\log 5.$ $\left[\frac{9}{17};\ \text{impossibile}\right]$

399 $\log_2(x+2)+\log_2 x=3; \quad \ln(3x-8)+\ln(x-3)=\ln 2.$ $\left[2;\ \frac{11}{3}\right]$

400 $\ln(9-x)+\ln(x-4)-\ln 4=0; \quad 2\ln(x+1)=\ln(x+1)+\ln 6.$ $[5 \text{ e } 8;\ 5]$

401 $\ln(x^2-x+2)-\ln(2x-3)=\ln(x+2); \quad \ln(x-1)=3.$ $[2;\ e^3+1]$

402 $\log_3|3-2x|=2; \quad \log_2|2x^2-x|+\log_2\frac{1}{3}=0.$ $\left[-3 \text{ e } 6;\ -1 \text{ e } \frac{3}{2}\right]$

ESERCIZI SVOLTI

403 $\log_2 x+3\log_4 x=10$ (1)

Deve essere $x>0$ essendo x argomento di due logaritmi.
Nella (1) compaiono logaritmi in basi diverse; per poter applicare le proprietà dei logaritmi occorre che le basi siano uguali.

Trasformiamo perciò la (1) applicando la formula del cambiamento di base dei logaritmi $log_a b = \dfrac{log_c b}{log_c a}$ in virtù della quale si ha $log_4 x = \dfrac{log_2 x}{log_2 4} = \dfrac{1}{2} log_2 x$. La (1) perciò diventa, per $x > 0$,

$$log_2 x + \frac{3}{2} log_2 x = 10 \longrightarrow 5\ log_2 x = 20 \longrightarrow log_2 x = 4 \longrightarrow x = 16 \text{ (accettabile)}$$

404 $4\ log_x 5 = log_5 x - 3$ (2)

Poiché in questa equazione l'incognita x, oltre a essere l'argomento di un logaritmo, figura anche come base, le condizioni di accettabilità delle soluzioni sono

$$\text{C.A.: } x > 0,\ x \neq 1$$

Applicando la formula $log_a b = \dfrac{1}{log_b a}$, possiamo scrivere la (2) nella forma

$$4 \cdot \frac{1}{log_5 x} = log_5 x - 3 \qquad (3)$$

Per risolvere questa equazione frazionaria poniamo $y = log_5 x$ e osserviamo che, essendo $x \neq 1$ per le C.A., è senz'altro $log_5 x \neq 0$, cioè $y \neq 0$. Sostituendo nella (3) si ha:

$$\frac{4}{y} = y - 3 \longrightarrow y^2 - 3y - 4 = 0 \quad \begin{cases} y = 4 \xrightarrow[y = log_5 x]{} log_5 x = 4 \longrightarrow x = 5^4 \longrightarrow x = 625 \\ y = -1 \xrightarrow[y = log_5 x]{} log_5 x = -1 \longrightarrow x = 5^{-1} \longrightarrow x = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Entrambe le soluzioni sono evidentemente accettabili.

---

405 $log_4(2x+3) + log_{2x+3} 4 = \dfrac{5}{2}$. $\left[\dfrac{13}{2}; -\dfrac{1}{2}\right]$

406 $log_3(x+1) + log_{(x+1)} 3 = \dfrac{10}{3}$. $[26; \sqrt[3]{3} - 1]$

407 $8\ log_2(3x-2) + 12\ log_{(3x-2)} 2 = 35$. $\left[6; \dfrac{\sqrt[8]{8}+2}{3}\right]$

408 $log_3 x + 2\ log_9 x = 2$. $\left(log_a b = log_{a^n} b^n \text{ oppure } log_9 x = \dfrac{log_3 x}{log_3 9} \dots\right)$ $[3]$

409 $log_x \dfrac{1}{x} + 2\ log_{\frac{1}{x}}(x-1) = log_x 4 + log_{\frac{1}{x}} x$. $\left[\dfrac{3}{2}\right]$

410 $2\ log_x \dfrac{1}{x} + log_x 4 = log_{\frac{1}{x}}(4x)$. $[16]$

411 $log_{\frac{1}{2}} x - log_{\frac{1}{4}} x = log_4 16$. $\left[\dfrac{1}{16}\right]$

412 $\dfrac{1}{4} log_2(x+1) + log_8(x-1) = 1 + log_{16}(x^2-1)$. $[2^{12}+1]$

413 $\dfrac{1}{2} log_2 x + log_4 x = 2$; $\quad log_3 x - 3\ log_9 x + 2 = 0$. $[4; 81]$

414 $log_4 x^2 - log_8 \sqrt{x} = \dfrac{5}{3}$; $\quad 3\ log_2 \sqrt{x} + log_4 x^2 = 10$. $[4; 16]$

415 $log_2 x = log_2(9-2x) - log_2(x-2)$. $[3]$

416 $\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 3;\quad \log_{\sqrt{3}} x - 5\log_3 x = 3.$ $\left[\frac{8}{7};\ \frac{1}{3}\right]$

417 $\dfrac{\log(7-6x)}{\log x} = 2;\quad \dfrac{\log 9}{2\log(x-1)} = 1.$ [impossibile; 4]

418 $\dfrac{\log(x-1)}{\log(x^3-8x+5)} = \dfrac{1}{3}.$ [3]

419 $(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 2 = 0$. (Porre $\log_2 x = t$...) $\left[2;\ \frac{1}{4}\right]$

420 $(\log_3 x)^2 - \log_3 x = 0;\quad 2\log^2_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 0.$ $\left(\text{Osservare che } \log^2_{\frac{1}{2}} x = (\log_{\frac{1}{2}} x)^2\right)$

[1 e 3; 1 e $\sqrt{2}$]

421 $\ln^2 x + \ln x - 6 = 0;\quad 2\log^2_2 x - 17\log_2 x + 8 = 0.$ [e^{-3} e e^2; $\sqrt{2}$ e 2^8]

422 $\dfrac{6}{(\log x)^2-1} + \dfrac{3}{\log x + 1} = \dfrac{\log x + 1}{\log x - 1}$. (Assumere come incognita $\log x$...) [100]

423 $\log_2 a - 2 = \frac{1}{2}\log_2(9x^2+a^2) - \log_4 25.$ $\left[\pm\frac{a}{4} \text{ con } a > 0\right]$

424 $\log^2_3 x + 2\log_3 x - 3 = 0.$ $\left[3;\ \frac{1}{27}\right]$

425 $2\log^2_{\frac{1}{2}} x - 5\log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0;\quad 3\log^2_{\frac{1}{3}} x - 2\log_{\frac{1}{3}} x - 1 = 0.$ $\left[\frac{1}{4} \text{ e } \sqrt{\frac{1}{2}};\ \frac{1}{3} \text{ e } \sqrt[3]{3}\right]$

426 $\log^2_3 x + \log_3 x - 6 = 0;\quad 3\log^2_2 x + 5\log_2 x - 2 = 0.$ $\left[9 \text{ e } \frac{1}{27};\ \sqrt[3]{2} \text{ e } \frac{1}{4}\right]$

427 $\dfrac{5}{\log x + 4} - \dfrac{3}{\log x - 2} = 4.$ $\left[10^{-\frac{5}{2}};\ 10\right]$

428 $\dfrac{\log x - 4}{\log x + 1} = \dfrac{15}{4} + \dfrac{\log x + 1}{\log x - 4}.$ $\left[10^3;\ 10^{-\frac{8}{3}}\right]$

429 $\dfrac{2\log_4 x - 5}{2\log_4 x + 1} + \dfrac{6}{\log_4 x^2 - 3} = \dfrac{7}{4}.$ $\left[\frac{1}{32};\ 2^7\right]$

430 $3(\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x) = 4 - \log_2 \dfrac{1}{x}.$ $\left[\frac{1}{16}\right]$

431 $\log_3(x+3) + \log_{\frac{1}{3}}(x^2+x-2) = \log_{\frac{1}{3}}(x+2) + \log_3 2.$ [5]

ESERCIZI SVOLTI

432 $x \log_2 x = 2$ (4)

Deve essere $x > 0$ per l'esistenza del logaritmo.
Questa equazione, nella quale l'incognita figura anche, ma non solo, come argomento di un logaritmo, è trascendente.

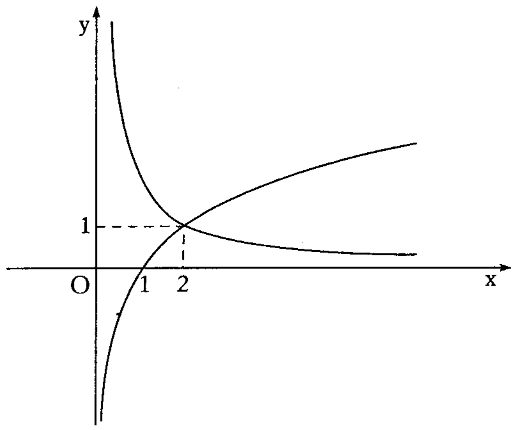
Per equazioni di questo tipo la risoluzione grafica, anche se per lo più è solo approssimata, è l'unica possibile.
L'equazione (4) si può scrivere nella forma

$$log_2 x = \frac{2}{x}$$

e perciò basterà risolvere graficamente il sistema

$$\begin{cases} y = log_2 x \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}$$

cioè trovare le intersezioni della curva logaritmica di equazione $y = log_2 x$ con il ramo dell'iperbole di equazione $y = \frac{2}{x}$ che si trova nel primo quadrante (dovendo essere $x > 0$).
Dalla figura si vede che l'equazione data ha un'unica soluzione e questa è $x = 2$.



433 $log_2(2^x - 5) = 1 + log_2(2^x - 7)$ (5)

Poiché $1 = log_2 2$, la (5) diventa

$$log_2(2^x - 5) = log_2 2 + log_2(2^x - 7) \rightarrow log_2(2^x - 5) = log_2[2 \cdot (2^x - 7)]$$

e, passando agli argomenti, si ottiene un'equazione esponenziale:

$$2^x - 5 = 2(2^x - 7) \longrightarrow 2^x - 5 = 2 \cdot 2^x - 14 \longrightarrow 2^x(1 - 2) = -14 + 5 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow -2^x = -9 \longrightarrow 2^x = 9 \longrightarrow x = log_2 9 \longrightarrow x = \frac{log\,9}{log\,2}$$

La soluzione è accettabile.
Infatti, sostituendo nella (5) 9 al posto di 2^x, i due argomenti, riducendosi il primo a $4 > 0$ e il secondo a $2 > 0$, sono entrambi positivi.

434 $log(4^x - 3) - 2\,log\,3 = (1 - 2x)\,log\,2.$ $\left[\frac{log\,6}{log\,4}\right]$

435 $x\,log\,3 + log(1 + 3^x) = 1 + 2\,log\,3.$ [2]

436 $1 + x\,log\,3 = 2x\,log\,2 + log\,5 - log\,16.$ $\left[\frac{5\,log\,2}{log\,4 - log\,3}\right]$

437 $(2x + 1)\,log\,2 = log(1 + 2^x)$; $\quad log_3(2 - 3^x) + x = 0.$ [0; 0]

438 $x\,log\,3 = log(2 - 3^{-x}).$ [0]

439 $log(4^{1-x} + 2) - log\,2 = log(2^{2x+1} - 3).$ $\left[\frac{log(1 + \sqrt{2})}{log\,4}\right]$

440 $log(2^{x-1} + 3^{x+2}) = log\,3 + log(3^{x-2} + \sqrt{4^{x+1}}).$ $\left[\frac{log\,33 - log\,52}{log\,3 - log\,2}\right]$

441 $log_3(\sqrt{3^x} - 8\sqrt[4]{3^x}) = 2$; $\quad \frac{log(2 \cdot 3^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 3^{\frac{1}{2x}})}{log(1 + 2 \cdot 9^{\frac{1}{4x}})} = 1.$ $\left[8;\ -\frac{log\,3}{2\,log\,2}\right]$

442 $\left(\log_3 x-\frac{1}{2}\right)^2+2\log_3 x=3\log_3 x^2-\frac{23}{4}.$ $[9;\ 27]$

443 $\frac{\log\sqrt{x}+2}{3\log\sqrt{x}}=2-\log\sqrt{x}.$ $\left[10^2;\ 10^{\frac{4}{3}}\right]$

444 $\frac{\log x+1}{\log x-1}+\frac{\log x-1}{\log x+1}=\frac{2}{\log^2 x-1}.$ $[1]$

445 $\frac{\log_a x}{1-\log_a x^3}=1+\frac{\log_a x+1}{\log_a x-1}$, con $a\in\mathbb{R}^+-\{1\}.$ $[1;\ \sqrt[7]{a^3}]$

446 $2(2+\log_{e^{\frac{1}{2}}}\sqrt[3]{x})\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{x}=\log_{\frac{1}{2}}x;\quad (2-\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{x})(2+\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{x})=\log_{\frac{1}{2}}x.$ $\left[2\sqrt{2}\text{ e }1;\ 2^{12}\text{ e }\frac{1}{8}\right]$

447 $(\log_2 x-1)(\log_2\sqrt{x}-\log_2 x+1)+6=0.$ $\left[32;\ \frac{1}{4}\right]$

448 $\log\left(7^x+\frac{1}{7^{1-x}}\right)=\log 2+\log(3\cdot 5^x+5^{x+2}).$ $\left[\frac{\log 49}{\log 7-\log 5}\right]$

449 $x\log 3+\log(2\cdot 3^x-3)+\log 5=3\log 3+\log(2-3^{x-2}).$ $[1]$

450 $\log(3^{1+x}+2^{2-x})=\log 15-x\log 2.$ $\left[\frac{\log 11-\log 3}{\log 6}\right]$

451 $\frac{\log_2(4^{x+1}-2)-2x}{2x+1}=1;\quad \log_2\log_3 x=1.$ $[0;\ 9]$

452 $x^{\log x}=10$. (Considerare i logaritmi decimali di entrambi i membri) $\left[10;\ \frac{1}{10}\right]$

453 $x^{\log\sqrt{x}}=100;\quad \frac{10}{x^{\log x}}=\frac{\sqrt{10}}{x^{\log\sqrt{x}}}.$ $\left[10^{\pm 2};\ 10\text{ e }\frac{1}{10}\right]$

454 $\frac{1}{2}\log_3\left(10-\frac{3}{3^{2x-3}}\right)=x-1.$ $[1;\ 2]$

455 $\log(4+\sqrt[2x]{25})=\log 3+\log(28-\sqrt[x]{25}).$ $[1]$

456 $\log(12-\sqrt[2x]{8})-\log(16+\sqrt[x]{8})+\log 2=0.$ $\left[\frac{3}{2}\right.$ non accettabile, perché ...$\left.\right]$

457 $\frac{\log(2\sqrt[x]{3}+3\sqrt[2x]{3})}{\log(1+2\sqrt[4x]{9})}=1.$ $\left[-\frac{\log 3}{2\log 2}\right.$, non accettabile; perché?$\left.\right]$

458 $1+\log\frac{3^x}{3}=\log 3+(2x-1)\log 2.$ $\left[\frac{2\log 3-\log 20}{\log 3-2\log 2}\right]$

459 $\log_2 x-1=2\log_8 x;\quad \log_2(x-1)=6-\log_4(x-1);\quad 3\log_5 x=\frac{1}{\log_x 5}-2.$ $\left[8;\ 17;\ \frac{1}{5}\right]$

460 $2\log_3 x+2\log_x 3=5;\quad \log_3 x-2=\log_{27}x.$ $[9\text{ e }\sqrt{3};\ 27]$

461 $\frac{3}{2}\log_8 x+\log_2\sqrt{x}=4;\quad \log_4(x-3)+\log_{x-3}4=\frac{17}{4}.$ $[16;\ 3+\sqrt{2}\text{ e }259]$

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

462 $2\, log_a 3 + log_a x = log_a(5x-4) \longrightarrow$

a) ☐ $x = 1$; b) ☐ $x = -1$; c) ☐ $x = 2$; d) ☐ impossibile.

463 $log\, 11 + log(x+1) = 1 \longrightarrow$

a) ☐ impossibile; b) ☐ $x = -12$; c) ☐ $x = -\frac{1}{11}$; d) ☐ $x = -1$.

464 $2\, log(2x+1) + log\, 3 = log(12x+39) \longrightarrow$

a) ☐ $x = \pm\sqrt{3}$; b) ☐ $x = -\sqrt{3}$; c) ☐ $x = \sqrt{3}$; d) ☐ impossibile.

465 $2\, log(x+1) + log\, 3 = log(6x+7) \longrightarrow$

a) ☐ impossibile; b) ☐ $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; c) ☐ $x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$; d) ☐ $x = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

466 $log_x 2 + log_2 x = 2 \longrightarrow$

a) ☐ $x = 1$; b) ☐ impossibile; c) ☐ $x = 2$; d) ☐ $x = 8$.

Sistemi di equazioni logaritmiche

Risolvere i seguenti sistemi.

ESERCIZI SVOLTI

467 $$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ log\,(x-1) + log\, y = log\,(3x^2 + y + 2) \end{cases} \tag{1}$$

Dalla prima equazione ricaviamo $y = 3x - 2$, che sostituiamo nella seconda, ottenendo

$$\begin{aligned} & log\,(x-1) + log\,(3x-2) = log\,(3x^2 + 3x - 2 + 2) \\ & \longrightarrow log[(x-1)(3x-2)] = log\,(3x^2 + 3x) \end{aligned} \tag{2}$$

È questa un'equazione logaritmica nell'incognita x, che risolviamo ottenendo

$$(x-1)(3x-2) = 3x^2 + 3x \longrightarrow -8x + 2 = 0 \longrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Verificando la condizione di accettabilità per la (2), si conclude che la soluzione $x = \frac{1}{4}$ non è accettabile, poiché rende negativo l'argomento del primo logaritmo. Pertanto, il sistema (1) risulta impossibile.

468 $$\begin{cases} log_3 x - log_3 y = 1 \\ log_2 x + log_2 y = 2 + log_2 3 \end{cases} \tag{3}$$

Consideriamo la prima equazione:

$$log_3 x - log_3 y = log_3 3 \longrightarrow log_3 \frac{x}{y} = log_3 3 \longrightarrow \frac{x}{y} = 3 \longrightarrow x = 3y$$

Consideriamo ora la seconda equazione: poiché $2 = log_2 4$, essa si può riscrivere così:

$$log_2 x + log_2 y = log_2 4 + log_2 3 \rightarrow log_2(xy) = log_2 12 \longrightarrow xy = 12$$

Il sistema (3) si è ridotto al sistema $\begin{cases} x=3y \\ xy=12 \end{cases}$ che risolveremo con il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} x=3y \\ 3y\cdot y=12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3y \\ y^2=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\pm 6 \\ y=\pm 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-6 \\ y=-2 \end{cases}$$

Verifichiamo ora l'accettabilità delle soluzioni: poiché non esistono logaritmi di numeri negativi, osservando il sistema (3), si deduce subito che gli argomenti x e y devono essere positivi. Quindi la coppia $\begin{cases} x=-6 \\ y=-2 \end{cases}$ non è soluzione accettabile e il sistema ha l'unica soluzione $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$

469 $\begin{cases} x-3y=5 \\ \log x+\log y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} \log_2 x-2=\log_2 \dfrac{32}{y} \\ x+y=24 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=20 \\ y=5 \end{cases} ; \begin{cases} 16 \\ 8 \end{cases} \text{e} \begin{cases} 8 \\ 16 \end{cases}\right]$

470 $\begin{cases} \log x+\log y=\log 15 \\ x+y=8 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} 3 \\ 5 \end{cases} ; \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}\right]$

471 $\begin{cases} \log_3 x-2\log_3 2=2-\log_3 y \\ x+y=4\sqrt{10} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} 2(\sqrt{10}\pm 1) \\ 2(\sqrt{10}\mp 1) \end{cases}\right]$

472 $\begin{cases} \log_3 x+\log_3 y=\dfrac{1}{2}(\log_3 2+1) \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{cases} ; \begin{cases} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{cases}\right]$

473 $\begin{cases} \log_3(x+y)=0 \\ \log_2(x^2+y^2)-\log_2 x=1+\log_2 y \end{cases}$ $\left[\begin{cases} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{cases}\right]$

474 $\begin{cases} 3x+y=8 \\ \log_5 x+\log_5 y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} \log_2 x+y=4 \\ 2\log_2 x-3y=3 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases} \text{e} \begin{cases} \dfrac{5}{3} \\ 3 \end{cases} ; \begin{cases} 8 \\ 1 \end{cases}\right]$

475 $\begin{cases} \log_3 x-\log_3 y=1 \\ \log_2 3+\log_2 x=2+2\log_2 a-\log_2 y \end{cases}$ $\left[\begin{cases} 2a \\ \dfrac{2}{3}a \end{cases} \text{con } a>0\right]$

476 $\begin{cases} \log(x+3y-1)-\log(x+2y-3)=1 \\ \log(3y+1)-\log 3=\log\left(\dfrac{y}{3}-3x\right) \end{cases}$ $\left[\begin{cases} -\dfrac{5}{9} \\ 2 \end{cases}\right]$

477 $\begin{cases} 2[\log_2(3x-y)-\log_2 3]=\log_2(x-y)+3 \\ 2\log_2(x+y)=5+\log_2(x-y) \end{cases}$ $\left[\begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}\right]$

478 $\begin{cases} \log x+\log y-\log(x^2+y^2)+\log 2=0 \\ (x^2+y^2+1)^2-3(x^2+y^2)=1 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}\right]$

479 $$\begin{cases} \log y+\frac{1}{2}\log(x+y)=\log(x+y) \\ \log_2 x+\frac{1}{2}\log_2(x+y)=1+\log_2(x+y) \end{cases}$$ $$\left[\begin{cases} 6 \\ 3 \end{cases}\right]$$

480 $$\begin{cases} \log_2(x-2y)+\log_2(x+y)=2+\log_2 7 \\ \log_2(3x-y)=\log_3 81 \end{cases}$$ $$\left[\begin{cases} 5,4 \\ 0,2 \end{cases};\ \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}\right]$$

481 $$\begin{cases} \frac{1}{2}\log_5(x+y)=\log_5 3 \\ \log_2 x-2=\log_2 5-\log_2 y \end{cases}$$ $$\left[\begin{cases} 5 \\ 4 \end{cases}\text{ e }\begin{cases} 4 \\ 5 \end{cases}\right]$$

482 $$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ \frac{1}{2}\log_a(x+y)=\log_a\sqrt{7} \end{cases};\quad \begin{cases} x^y=2^9 \\ 2y+\log_2 x=9 \end{cases}$$ $$\left[\begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}\text{ e }\begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases};\ \begin{cases} 8 \\ 3 \end{cases}\text{ e }\begin{cases} 64 \\ \frac{3}{2} \end{cases}\right]$$

483 $$\begin{cases} 3^x+3^y=2 \\ \log_3(x+2)+\log_3(2+y)=\log_3(4+xy) \end{cases}$$ $$\left[\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}\right]$$

484 $$\begin{cases} \log_a x^y=2 \\ 2y+\log_a x=5,\ a\in\mathbb{R}^+-\{1\} \end{cases}$$ $$\left[\begin{cases} a \\ 2 \end{cases};\ \begin{cases} a^4 \\ \frac{1}{2} \end{cases}\right]$$

485 $$\begin{cases} \log(2x+3)+\log 3=\log(6x^2)+2\log 2 \\ \log(9-2x)+\log(y-1)=\log 2+\log(2-xy-4x) \end{cases}$$ $$\left[\begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{cases}\right]$$

486 $$\begin{cases} \log_2(x+y)-\log_2(3x-y)+2=0 \\ \log_2(3x-y)-\log_2 7=4-\log_2(x-2y) \end{cases}$$ $$\left[\begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}\right]$$

487 $$\begin{cases} \log(x^2-96y)-1=\log(x-4y) \\ \log 4+\log(2x-3y)=2 \end{cases}$$ $$\left[\begin{cases} \frac{100}{3} \\ \frac{125}{9} \end{cases};\ \begin{cases} 14 \\ 1 \end{cases}\right]$$

488 $$\begin{cases} 2\log(x+5)-\log(y+2)=1 \\ 1+\log_2 x=\log_2(2+y) \end{cases};\quad \begin{cases} 2^x+2^y=12 \\ \log_2(2x-y)=0 \end{cases}$$ $$\left[\begin{cases} 5 \\ 8 \end{cases};\ \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}\right]$$

489 $$\begin{cases} y-1=\log_6(x+3) \\ \log_6(x+4)=2-y \end{cases};\quad \begin{cases} \log_2 y+\log_3(x+1)=2 \\ \log_2 y-\log_3(x+3)=1 \end{cases}$$ $$\left[\begin{cases} -1 \\ \log_6 12 \end{cases};\ \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}\right]$$

Risoluzione grafica di sistemi ed equazioni

Risolvere graficamente i seguenti sistemi.

490 $\begin{cases} y = log_2 x \\ y = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} y = log_{\frac{1}{2}} x \\ y = 2. \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 2 \end{cases}\right]$

491 $\begin{cases} y = log_{\frac{1}{2}} x \\ x - 2 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = log_3 x \\ y = 3x - 3 \end{cases}$

$\left[\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases} \text{ con } 0 < \alpha < 1 \text{ e } -3 < \beta < -2\right]$

492 $\begin{cases} x + y = 0 \\ y = log_{\frac{1}{3}} x \end{cases}$; $\begin{cases} y = x \\ y = log_{\frac{1}{3}} x \end{cases}$ [impossibile; $x = y = \alpha$, con $0 < \alpha < 1$]

493 $\begin{cases} y = log_2 x \\ y + x = 6 \end{cases}$; $\begin{cases} y = log_2 x \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}\right]$

494 $\begin{cases} y = log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \\ y = 1 - x^2 \end{cases}$; $\begin{cases} y = |log_2 x| \\ y - 2x = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}\right]$

Risolvere graficamente le seguenti equazioni.

495 $log_3 x = 2$; $log_{\frac{1}{2}} x = 1$; $2 = log_{\frac{1}{2}} x$.

496 $log_{\frac{1}{2}} x + x = 1$; $log_{\frac{1}{2}} x = |x|$. [1 e 2; α, con $0 < \alpha < 1$ ($\alpha = 0,641...$)]

497 $4x - 3\ log_2 x = 5$. $\left[2; \frac{1}{2}\right]$

$\left(\text{Verificare dapprima che la retta } y = \frac{4x-5}{3} \text{ passa per i punti } \left(\frac{1}{2}; -1\right), (2; 1)\right)$

498 $3x + log_3 x = 0$; $log\ x + x = 1$. $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$

499 $x^2 + log_2 x = 1$; $log_3 x = \frac{3}{x}$; $log_2 x + 2x = 1 + x^2$. [1; 3; 1 e 2]

Disequazioni logaritmiche

Risolvere le seguenti disequazioni.

ESERCIZI SVOLTI

500 $log_2(x - 1) < 1$ (1)

Essa si può scrivere
$log_2(x - 1) < log_2 2$ (2)

ed è quindi equivalente al sistema costituito dalla disequazione $x - 1 < 2$, che si ottiene dalla (2) passando agli argomenti (senza cambiare il verso del simbolo di disuguaglianza perché la base dei logaritmi è 2, che è maggiore di 1), e dalla disequazione $x - 1 > 0$, che si ottiene ponendo maggiore di zero l'argomento del logaritmo che figura nella (1):

$$\begin{cases} x-1<2 \\ x-1>0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x>1 \end{cases} \longrightarrow 1<x<3$$

501 $\log_2 x > 3$ (3)

La condizione di esistenza è $x > 0$.
La (3) si può scrivere $\log_2 x > \log_2 2^3$

e perciò, essendo la base dei logaritmi $2 > 1$, si ha

$$\begin{cases} x>0 \\ x>8 \end{cases} \longrightarrow x>8$$

502 $\log_{\frac{1}{3}}(6x - x^2) + 2 < 0$ (4)

Deve essere $6x - x^2 > 0$.
La (4) si può scrivere

$$\log_{\frac{1}{3}}(6x - x^2) < -2 \longrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(6x - x^2) < \log_{\frac{1}{3}} 9 \qquad (5)$$

Essendo il logaritmo in base $\frac{1}{3}$ una funzione decrescente, la (5) equivale a

$$6x - x^2 > 9$$

con la condizione d'esistenza

$$6x - x^2 > 0$$

Le soluzioni della disequazione (4) sono perciò le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 6x-x^2>0 \\ 6x-x^2>9 \end{cases} \longrightarrow 6x-x^2>9 \longrightarrow x^2-6x+9<0 \longrightarrow (x-3)^2<0$$

Quest'ultima relazione è impossibile, perché $(x-3)^2$ non può essere negativo. La (4) dunque non è mai verificata.

---

503 $\log_2 x < 4$; $\log_{\frac{1}{2}} x > 1$. $\left[0 < x < 16;\ 0 < x < \frac{1}{2}\right]$

504 $\log_{\frac{1}{3}} x < 0$; $\log_2 x \geq \frac{1}{2}$. $[x > 1;\ x \geq \sqrt{2}]$

505 $\log_3 x \leq -1$; $\log_{\frac{1}{2}} x \geq -2$. $\left[0 < x \leq \frac{1}{3};\ 0 < x \leq 4\right]$

506 $1 < \log_2 x \leq 3$; $-1 < \log_{\frac{1}{2}} x \leq 2$. $\left[2 < x \leq 8;\ \frac{1}{4} \leq x < 2\right]$

507 $\log_2 3 > \log_2 x$; $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 5$. $[0 < x < 3;\ x > 5]$

508 $\log_3(2x+1) > 0$; $\log_5(x-2) < 0$. $[x > 0;\ 2 < x < 3]$

509 $\log_{\frac{1}{2}}(3x+5) < 0$; $\log_{\frac{1}{2}}(3x+5) < 1$. $\left[x > -\frac{4}{3};\ x > -\frac{3}{2}\right]$

510 $log(x-3) < 1;\quad ln(2x-1) > 1.$ $\left[3 < x < 13;\ x > \frac{e+1}{2}\right]$

511 $log_{\frac{1}{2}}(5+3x) \geq 1;\quad log_{\frac{1}{2}}x + log_{\frac{1}{2}}4 < 0.$ $\left[-\frac{5}{3} < x \leq -\frac{3}{2};\ x > \frac{1}{4}\right]$

512 $log_2(1-x^2) - 1 < 0;\quad log_{\frac{1}{2}}(2x+1) < 0.$ $[-1 < x < 1;\ x > 0]$

513 $log(x^2 - 15x) > 2;\quad log_{\frac{1}{2}}(2x-5) < 0.$ $[x < -5 \vee x > 20;\ x > 3]$

514 $ln(2x^2 - 5x + 3) < 0;\quad log_{\frac{3}{2}}(4-3x) \geq 0.$ $\left[\frac{1}{2} < x < 1 \vee \frac{3}{2} < x < 2;\ x \leq 1\right]$

515 $log(x^2 - 3x + 6) > 1;\quad ln(x^2 - 3) \geq 0.$ $[x < -1 \vee x > 4;\ x \leq -2 \vee x \geq 2]$

516 $log_a(x^2+2) < 0$ con $a > 1$; $log_a(x^2+2) < 0$ con $0 < a < 1$. [impossibile; $\forall x \in \mathbb{R}$]

517 $log_{\frac{3}{4}}(1-x^2) \leq 0;\quad log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) > 0.$ $[x = 0;\ -\sqrt{2} < x < -1 \vee 1 < x < \sqrt{2}]$

518 $log(3 - x) > 1;\quad log_{\frac{3}{2}}(4-3x) < 0.$ $\left[x < -7;\ 1 < x < \frac{4}{3}\right]$

519 $log_{\frac{3}{4}}(1-x^2) > 0;\quad log_a(5-x^2) < 0$ con $0 < a < 1$. $[-1 < x < 1 \wedge x \neq 0;\ -2 < x < 2]$

520 $log_{\frac{1}{2}}(2x+1) > -2;\quad log_{\frac{5}{4}}(1+5x) \leq 2.$ $\left[-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2};\ -\frac{1}{5} < x \leq \frac{9}{80}\right]$

521 $log_6(x^2 - 3x + 2) < 1;\quad \sqrt{log\, x} < 1.$ $[-1 < x < 1 \vee 2 < x < 4;\ 1 \leq x < 10]$

522 $log_3(x^2-1) > 0;\quad log_3(x^2 - 2x) < 1.$ $[x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2};\ -1 < x < 0 \vee 2 < x < 3]$

ESERCIZIO SVOLTO

523 $2\, log_{\frac{2}{3}}x > log_{\frac{2}{3}}(x+3) + log_{\frac{2}{3}}2$ (6)

C.A.: $\begin{cases} x > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \end{cases} \longrightarrow x > 0$

Riduciamo la (6) a forma canonica:

$$log_{\frac{2}{3}}x^2 > log_{\frac{2}{3}}[(x+3)\cdot 2]$$

Osserviamo la base dei logaritmi: $0 < \frac{2}{3} < 1$; quindi, passando agli argomenti, cambiamo il verso della disequazione:

$$x^2 < 2(x+3) \longrightarrow x^2 - 2x - 6 < 0 \longrightarrow 1 - \sqrt{7} < x < 1 + \sqrt{7}$$

Poniamo a sistema il risultato trovato con la C.A.

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{7} < x < 1 + \sqrt{7} \\ x > 0 \end{cases} \longrightarrow 0 < x < 1 + \sqrt{7}$$

La (6) è quindi verificata per $0 < x < 1 + \sqrt{7}$

524 $\frac{1}{2}\log_2 x + \log_4 x > 2; \quad \log(3x-1) \geq \log(7-x).$ $[x > 4;\ 2 \leq x < 7]$

525 $\log_2 x^2 - 3\log_4 x + 1 > 0; \quad \log_3 x^2 - 2\log_9 x - 2 < 0.$ $\left[x > \frac{1}{4};\ 0 < x < 9\right]$

526 $2\log_2 x^3 - \log_4 x^2 + 1 < 0; \quad \log_5 \frac{1}{x} - \log_{25} x^2 < 2.$ $\left[0 < x < \sqrt[5]{\frac{1}{2}};\ x > \frac{1}{5}\right]$

527 $\log_{\frac{4}{3}}(4x - 3x^2) < 0; \quad \log_{\frac{2}{5}} \frac{x+1}{x-1} \geq 0.$ $\left[0 < x < \frac{1}{3} \vee 1 < x < \frac{4}{3};\ x < -1\right]$

528 $\log x + \log(x+3) < 1; \quad 2\ln x - \ln(x-1) > 2\ln 2.$ $[0 < x < 2;\ x > 1 \wedge x \neq 2]$

529 $\ln x + \ln(2x-1) \leq \ln(2x+5) + \ln 3.$ $\left[\frac{1}{2} < x \leq 5\right]$

530 $\log_3 x + \log_3(x+1) - 1 > \log_3(x^2 - x).$ $[1 < x < 2]$

531 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x) > \log_{\frac{1}{2}}(x^2+1); \quad \log_{\frac{5}{4}}(1+5x) > 2.$ $\left[-1 < x < 0 \vee x > 1;\ x > \frac{9}{80}\right]$

532 $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+4) + \log_3(x-3) \leq \log_{\frac{1}{3}}(x+1); \quad \log_{\frac{27}{8}}\left(1 - \frac{3}{x}\right) \leq -\frac{1}{3}.$ $[x > 3;\ 3 < x \leq 9]$

533 $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 4x + 3) - \log_{\frac{1}{5}}(x-2) \geq \log_{\frac{1}{5}}(x+1).$ $[x > 3]$

534 $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 + 3x + 2) - \log_{\frac{1}{4}}(x+4) \leq \log_{\frac{1}{4}}(x-3).$ $[x > 3]$

535 $\log^2 x - 4\log x > 0; \quad \ln^2 x + \ln x \leq 0.$ $[0 < x < 1 \vee x > 10^4;\ e^{-1} \leq x \leq 1]$

536 $\log_3^2 x - \log_3 x < 0; \quad \log_2^2 x - \log_2 x > 0.$ $[1 < x < 3;\ 0 < x < 1 \vee x > 2]$

537 $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \geq 0; \quad \log_{\frac{1}{2}}(2x+1) \leq -2.$ $\left[0 < x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 4;\ x \geq \frac{3}{2}\right]$

538 $\log_{\frac{1}{3}}^2 x + \log_{\frac{1}{3}} x - 2 \leq 0; \quad (2\log_2 x - 1)\log_{\frac{1}{2}} 5 \leq 0.$ $\left[\frac{1}{3} \leq x \leq 9;\ x \geq \sqrt{2}\right]$

539 $\log_3^2 x + \log_3 x - 6 > 0; \quad \log_7(x^2+1) < 0.$ $\left[0 < x < \frac{1}{27} \vee x > 9;\ \text{impossibile}\right]$

540 $\log_5^2 x + \log_5 x - 2 > 0; \quad \log_3^2 x + 2\log_3 x - 3 < 0.$ $\left[0 < x < \frac{1}{25} \vee x > 5; \frac{1}{27} < x < 3\right]$

541 $\log x - \frac{2}{\log x} + 1 \geq 0.$ $\left[\frac{1}{100} \leq x < 1 \vee x \geq 10\right]$

542 $\log_2 x + \log_x 2 \leq 2.$ $[0 < x < 1 \vee x = 2]$

ESERCIZIO SVOLTO

543 $\log_9\left(\log_{\frac{1}{2}}(x-4)\right) > \frac{1}{2}$ (7)

Per l'esistenza del logaritmo in base $\frac{1}{2}$, dovrà essere $x - 4 > 0$; per l'esistenza del logaritmo in base 9 dovrà essere $\log_{\frac{1}{2}}(x-4) > 0$.

Poniamo a sistema tali disequazioni, che esprimono le C.A. delle soluzioni, con la (7):

$$\begin{cases} x-4>0 \\ log_{\frac{1}{2}}(x-4)>0 \\ log_9\left(log_{\frac{1}{2}}(x-4)\right) \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dalla prima disequazione otteniamo $x > 4$, dalla seconda

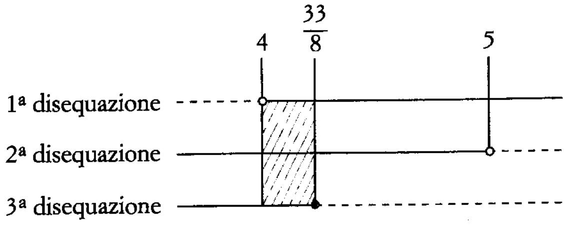
$$log_{\frac{1}{2}}(x-4)>0 \longrightarrow log_{\frac{1}{2}}(x-4)>log_{\frac{1}{2}}1 \longrightarrow x-4<1 \longrightarrow x<5$$

Dalla terza disequazione abbiamo

$$log_9\left[log_{\frac{1}{2}}(x-4)\right] \geq \frac{1}{2} \longrightarrow log_9\left[log_{\frac{1}{2}}(x-4)\right] \geq log_9 3 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow log_{\frac{1}{2}}(x-4) \geq 3 \longrightarrow log_{\frac{1}{2}}(x-4) \geq log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8} \longrightarrow x-4 \leq \frac{1}{8} \longrightarrow x \leq \frac{33}{8}$$

Le soluzioni del sistema, che sono anche le soluzioni (accettabili) della disequazione proposta, si determinano osservando il seguente schema grafico.



L'insieme delle soluzioni della (7) è quindi

$$S=\left(4\,;\frac{33}{8}\right]$$

544 $log_2(log_3(2-x))>2; \quad log_{\frac{1}{2}}[log_3(x+1)]<-2.$ $\quad [x<-79;\ x>80]$

545 $log_{\frac{1}{2}}\left[log_{\frac{1}{3}}(2x+3)\right]<1; \quad log_4\left[log_{\frac{1}{2}}(x-4)\right]<1.$ $\quad \left[-\frac{3}{2}<x<\frac{\sqrt{3}-9}{6};\ \frac{65}{16}<x<5\right]$

546 $log 5<log[log_2(3+x)]; \quad log_{\frac{2}{3}}[log_2(1-x^2)] \leq 2.$ $\quad [x>29;\ \text{impossibile}]$

547 $log_3\ log_3(2x-5)<0.$ $\quad [3<x<4]$

548 $log\ log(x^2-6)<0.$ $\quad [-4<x<-\sqrt{7} \vee \sqrt{7}<x<4]$

549 $log\ log(x^2-15)<0.$ $\quad [-5<x<-4 \vee 4<x<5]$

550 $ln\ ln(x-1) \geq 0.$ $\quad [x \geq e+1]$

551 $log_3\ log_{\frac{1}{3}}(1+3x)>0.$ $\quad \left[-\frac{1}{3}<x<-\frac{2}{9}\right]$

552 $log_3\ log_2(x-1)<0.$ $\quad [2<x<3]$

Risolvere graficamente le seguenti disequazioni.

ESERCIZIO SVOLTO

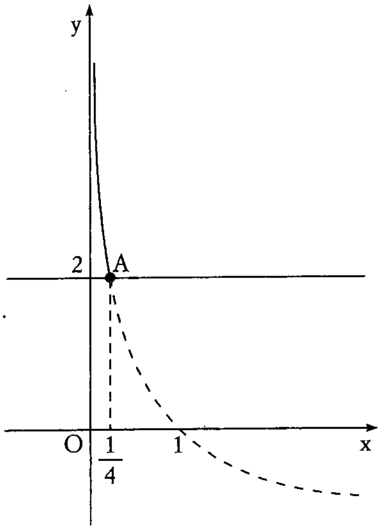
553 $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 2$ (8)

Essa è la risolvente il sistema

$$\begin{cases} y = \log_{\frac{1}{2}} x \\ y \geq 2 \end{cases} \quad (9)$$

per la cui soluzione conviene esaminare la figura a lato, da cui si vede chiaramente che i punti della curva logaritmica a sinistra di A e il punto A stesso verificano il sistema (9); quindi la (8) è verificata per

$$0 < x \leq \frac{1}{4}$$



554 $\log_{\frac{1}{2}} x < 0$; $\log_2 x \leq -1$. $\left[x > 1;\ 0 < x \leq \frac{1}{2}\right]$

555 $\log_3 x < 2$; $\log_3 x \geq \frac{1}{2}$. $[0 < x < 9;\ x \geq \sqrt{3}]$

556 $\log_2 x > 1 - x$; $\log_{\frac{1}{2}} x \geq x - 1$. $[x > 1;\ 0 < x \leq 1]$

557 $2 \log_{\frac{1}{2}} x + 1 \leq x$. (Rappresentare le curve $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ e y...) $[x \geq 1]$

558 $\log_3 x \geq \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. $\Big($Osservare dapprima che le curve $y = \log_3 x$ e $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ s'incontrano nei punti $(1\,;\,0)$ e $(3\,;\,1)$...$\Big)$ $[1 \leq x \leq 3]$

559 $\log_3 x + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}x$. (Vedi esercizio precedente...) $[0 < x < 1 \vee x > 3]$

560 $3 \log_2 x \geq 4x - 5$. (Osservare dapprima che le curve $y = \log_2 x$ e $y = \frac{4x-5}{3}$ s'incontrano nei punti $\left(\frac{1}{2}\,;\,-1\right)$ e $(2\,;\,1)$...) $\left[\frac{1}{2} \leq x \leq 2\right]$

561 $3 \log_2 x < 4x - 5$. (Vedi esercizio precedente) $\left[0 < x < \frac{1}{2} \vee x > 2\right]$

562 $\log_2 x + 1 > \frac{1}{x}$; $\log_2 x + x^2 > 0$. $[x > 1;\ x > \alpha,\ \text{con } 0 < \alpha < 1]$

563 $\log_2 x < 1 - x^2$; $\log_3 x + x^2 \geq 1$. $[0 < x < 1;\ x \geq 1]$

564 $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x} + 1 - x \geq 0$; $x + 2 \log_{\frac{1}{3}} x \leq 1$. $[0 < x \leq 1;\ 1 \leq x \leq 3]$

Esercizi sui domini delle funzioni

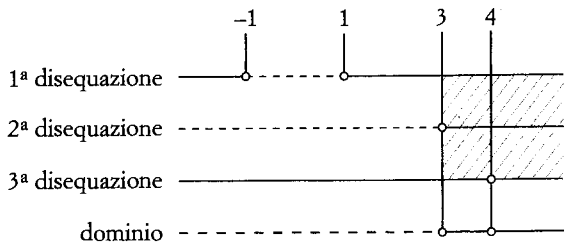
Determinare il dominio delle funzioni aventi le seguenti equazioni.

ESERCIZI SVOLTI

565 $y = log_{x-3}\sqrt{x^2 - 1}$

Per l'esistenza del radicale dev'essere $x^2 - 1 \geq 0$. Tale radicale è argomento di un logaritmo e quindi dev'essere positivo; essendo esso un radicale di indice pari, non può assumere valori negativi e basterà perciò escludere la possibilità che si annulli. Deve quindi essere $x^2 - 1 \neq 0$. Le due condizioni finora poste, $x^2 - 1 \geq 0$ e $x^2 - 1 \neq 0$, equivalgono all'unica condizione $x^2 - 1 > 0$. Si deve considerare poi anche la base del logaritmo, che è un'espressione in cui figura x: essa dev'essere positiva e diversa da 1. Il dominio della funzione data è perciò costituito dall'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x - 3 > 0 \\ x - 3 \neq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ x > 3 \\ x \neq 4 \end{cases}$$



Il dominio richiesto è perciò $D = (3\ ;\ 4) \cup (4\ ;\ +\infty)$.

566 $y = log_3\sqrt{log_2 x - 1}$

Deve essere $\quad \sqrt{log_2 x - 1} > 0 \longrightarrow log_2 x - 1 > 0 \longrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ log_2 x > 1 \end{cases} \longrightarrow x > 2$

Quindi si ha $D = (2\ ;\ +\infty)$.

---

567 $y = log_2(x-1); \quad y = log_3(x^2 - 6x + 8).$ $\quad [D = (1\ ;\ +\infty);\ D = (-\infty\ ;\ 2) \cup (4\ ;\ +\infty)]$

568 $y = log_x x; \quad y = log_{x-1} x.$ $\quad [D = \mathbb{R}^+ - \{1\};\ D = (1\ ;\ 2) \cup (2\ ;\ +\infty)]$

569 $y = log_x(x-1); \quad y = log_x(x^2 - x).$ $\quad [D = (1\ ;\ +\infty);\ D = (1\ ;\ +\infty)]$

570 $y = log_{2x} x^2; \quad y = log(x^2 + x + 1).$ $\quad \left[D = \mathbb{R}^+ - \left\{\frac{1}{2}\right\};\ D = \mathbb{R}\right]$

571 $y = log(x^2 - 6x + 9); \quad y = log_x(x^2 - 6x).$ $\quad [D = \mathbb{R} - \{3\};\ D = (6\ ;\ +\infty)]$

572 $y = log_x(2x^2 - x).$ $\quad \left[D = \left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\right) \cup (1\ ;\ +\infty)\right]$

573 $y = log_{(x^2-1)}(3x^2).$ $\quad [D = \{x\ |(x < -1 \vee x > 1) \wedge x \neq \pm\sqrt{2}\}]$

574 $y = log_{(1-4x^2)}(3x^2 + 1); \quad y = \sqrt{log\ x}.$ $\quad \left[D = \left(-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right) \cup \left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right);\ D = [1\ ;\ +\infty)\right]$

575 $y = log_{2x-3}(6x-5)$; $\quad y = \sqrt{3 - log_4 x}$. $\qquad \left[D = \left(\frac{3}{2}\,;\,2\right) \cup (2\,;\,+\infty);\ D = (0\,;\,64]\right]$

576 $y = log_{x^2}(9 - x^2)$. $\qquad [D = \{x \mid -3 < x < 3 \wedge x \neq \pm 1 \wedge x \neq 0\}]$

577 $y = log_a\, log_a x$. $\qquad$ [per $a > 1$: $D = (1\,;\,+\infty)$; per $0 < a < 1$: $D = (0\,;\,1)$]

578 $y = log_{1-x}(3x + x^2)$; $\quad y = log_3(5x - x^2)$. $\qquad [D = (-\infty\,;\,-3) \cup (0\,;\,1);\ D = (0\,;\,5)]$

579 $y = log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{\sqrt{x}}$; $\quad y = log_{2x}(x^2 - 9)$. $\qquad \left[D = \left(\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right);\ D = (3\,;\,+\infty)\right]$

580 $y = log_x \dfrac{x-1}{2-x}$; $\quad y = log \dfrac{\sqrt{x}-1}{2-x}$. $\qquad [D = (1\,;\,2);\ D = (1\,;\,2)]$

581 $y = log_x \sqrt{x^2 - 25}$; $\quad y = log_x \sqrt{4 - x^2}$. $\qquad [D = (5\,;\,+\infty);\ D = (0\,;\,1) \cup (1\,;\,2)]$

582 $y = log_5(x^2 - 4x) + \sqrt{x^2 - 16}$; $\quad y = log_2(2^x - 2^{-2x})$.
$[D = (-\infty\,;\,-4] \cup (4\,;\,+\infty);\ D = \mathbb{R}^+]$

583 $y = log_3\left(\dfrac{2x-1}{2x^2 + x + 1} - \dfrac{2}{x+1}\right)$. $\qquad [D = (-\infty\,;\,-1)]$

584 $y = log_4\left(3 - \left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|\right)$. $\qquad \left[D = (-\infty\,;\,-6) \cup \left(-\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right)\right]$

585 $y = log_2\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} - 2\right)$; $\quad y = log(\sqrt{5} + x - \sqrt{4 + |1 - x^2|})$.
$\left[D = \left(-\frac{5}{3}\,;\,-1\right);\ D = \mathbb{R}^+\right]$

586 $y = log_3\sqrt{\dfrac{2}{3^x} - 18}$; $\quad y = log\left(1 - \dfrac{1 + 2^x}{1 - 2^x}\right)$. $\qquad [D = (-\infty\,;\,-2);\ D = \mathbb{R}^+]$

587 $y = log \dfrac{2^{3x} - 2^{1+2x} - 2^x + 2}{2^{3x} - 4^x - 12 \cdot 2^x}$. $\qquad [D = (0\,;\,1) \cup (2\,;\,+\infty)]$

588 $y = \sqrt{log_{\frac{3}{4}}(2x + 5) - log_{\frac{4}{3}}\dfrac{1}{x}}$; $\quad y = \sqrt{-log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x+1}{x-1}}$. $\qquad [D = \varnothing;\ D = (1\,;\,+\infty)]$

589 $y = log_2\left(1 + \dfrac{1-x}{2x}\right) + log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x + \sqrt{2}}{\sqrt{2}x - 1}$. $\qquad \left[D = \left\{x \mid x < -\sqrt{2} \vee x > \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right]$

590 $y = log_a(2^{x-1} - 1) + log_a(3^{2x+1} - 9)$, $a > 0 \wedge a \neq 1$. $\qquad [D = (1\,;\,+\infty)]$

591 $y = log_a[(2^{x-1} - 1)(3^{2x+1} - 9)]$, $a > 0 \wedge a \neq 1$. $\qquad \left[D = \left(-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right) \cup (1\,;\,+\infty)\right]$

592 $y = \sqrt{81\ log^4_{\frac{1}{8}}x + log^2_{\frac{1}{2}}x - 2}.$ $\left[D = \left(0\,;\ \frac{1}{2}\right] \cup [2\,;\ +\infty)\right]$

593 $y = \sqrt{1 - log_2|4 - x^2|}.$ $[D = [-\sqrt{6}\,;\ -2) \cup (-2\,;\ -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}\,;\ 2) \cup (2\,;\ \sqrt{6}]]$

Esercizi di riepilogo

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

594 $4^{1-x} > 3^{3-x} \longrightarrow$

a) ☐ $x < \dfrac{log\,4 - log\,27}{log\,4 - log\,3}$; b) ☐ $x > \dfrac{log\,27 - log\,4}{log\,3 - log\,4}$;

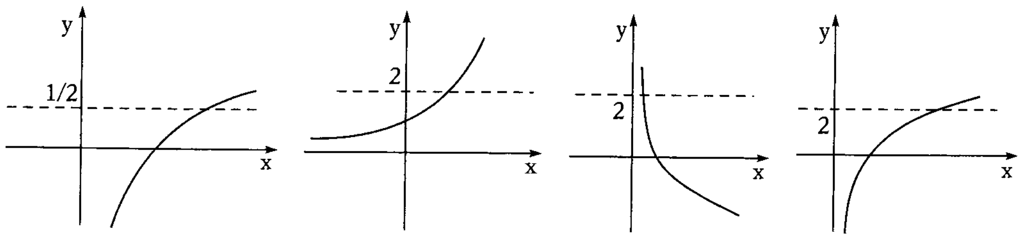
c) ☐ impossibile; d) ☐ $x > -log\,23$.

595 $log_2(x-2) - 2\,log_2(x-3) > 1 \longrightarrow$

a) ☐ $\frac{5}{2} < x < 4$; b) ☐ $3 < x < 4$; c) ☐ $x > 3$;

d) ☐ $\frac{5}{2} < x < 3$; e) ☐ $x > 4$.

596 Per risolvere graficamente la disequazione $log_{\frac{1}{2}}x < 2$ occorre considerare la figura



a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐

597 $log_{\frac{4}{5}}x + log_{\frac{5}{4}}\frac{1}{3} > 0 \longrightarrow$

a) ☐ $x > -3$; b) ☐ $x < -3$; c) ☐ $0 < x < \frac{1}{3}$;

d) ☐ $x < \frac{1}{3}$; e) ☐ $x > \frac{1}{3}$; f) ☐ $-3 < x < 0$.

598 $2\,log_2(x-3) + 1 > log_2(x-2) \longrightarrow$

a) ☐ $\frac{5}{2} < x < 4$; b) ☐ $x > 4$; c) ☐ $3 < x < 4$;

d) ☐ $x > 3$; e) ☐ $\frac{5}{2} < x < 3$; f) ☐ $x < 4$.

VERO O FALSO

599 Le due funzioni $y = \ln x - \ln(x-1)$ e $y = \ln\frac{x}{x-1}$ hanno lo stesso dominio. V F

600 L'equazione $\log_a x + 3 = \log_a(x+3)$ ammette la soluzione $x = \frac{3}{a^3-1}$ se è $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. V F

Risolvere le seguenti equazioni e i seguenti sistemi.

601 $\log(2x+3) + \log 3 = \log(6x^2) + 2\log 2.$ $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$

602 $10 \cdot 3^{2+x} - 6^{2-x} = 0.$ $\left[\frac{2\log 2 - 1}{\log 2 + 2\log 3} = \log_{18}\frac{2}{5}\right]$

603 $\log_2(x-3) = 1 + \log_4 x^2.$ [impossibile]

604 $\log_2(x-3) = 2 - \log_4 x^2.$ [4]

605 $\begin{cases} x^3 + y^3 = 126a^3 \\ \log_5 x + \log_5 y = 1 + 2\log_5 a \end{cases}$ $\left[\begin{cases} 5a \\ a \end{cases}; \begin{cases} a \\ 5a \end{cases} \text{ con } a > 0\right]$

606 $\begin{cases} xy = 10 \\ x^{\log y} = \frac{1}{100} \end{cases}; \begin{cases} xy = 2 \\ x^{\log_2 y} = \frac{1}{4} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} 100 \\ \frac{1}{10} \end{cases} \text{e} \begin{cases} \frac{1}{10} \\ 100 \end{cases}; \begin{cases} 4 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \text{e} \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 4 \end{cases}\right]$

607 $\begin{cases} y^x = 7 \\ 4x - 3\log_7 y = -4 \end{cases}; \begin{cases} x^{\log y} = 10^6 \\ 2\log x - \frac{1}{2}\log y = 5 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{\sqrt[3]{49}} \end{cases} \text{e} \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 49 \end{cases}; \begin{cases} 10^3 \\ 10^2 \end{cases} \text{e} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 10^{-12} \end{cases}\right]$

608 $\begin{cases} 3^{\log x} \cdot 9^{\log y} = 27 \\ x^{\log y} = 10 \end{cases}; \begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 2 \\ \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{3\log_y 2} = \frac{5}{4} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} 10 \\ 10 \end{cases} \text{e} \begin{cases} 100 \\ \sqrt{10} \end{cases}; \begin{cases} \sqrt{2} \\ 8 \end{cases}\right]$

609 $\begin{cases} 2\log_2(x-y) + \log_{\frac{1}{3}}(9x) = 2 \\ 3\log_2(x-y) + 2\log_{\frac{1}{3}}(9x) = 1 \end{cases}; \begin{cases} 2\log_2(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}(2y-1) = 5 \\ 3\log_2(x+1) - 2\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) = 4 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}; \begin{cases} 3 \\ \frac{3}{4} \end{cases}\right]$

610 $\begin{cases} \log_2 x + \frac{1}{\log_y 2} = 1 \\ \log_3(2x+5) - \log_3(2y+1) = 1 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \text{non accettabile perché...}\right]$

611 $\begin{cases} \log_2 x - \log_5 y = 1 \\ \frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_y 5} = 5 \end{cases}; \begin{cases} x^y = y^x \\ 3^x = 9^y \end{cases}$ $\left[\begin{cases} 8 \\ 25 \end{cases}; \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}\right]$

612 $\begin{cases} \sqrt[x]{x+y}=2 \\ (x+y)\cdot 2^{x+1}=128 \end{cases}$; $\begin{cases} (y+2)^x=5 \\ (y+2)^{1-x}=\dfrac{1}{y-2} \end{cases}$ $\left[\begin{cases}3\\5\end{cases};\begin{cases}1\\3\end{cases}\right]$

613 $\begin{cases} x^{x+y}=y^{12} \\ y^{x+y}=x^3 \\ \text{con } x>0,\ y>0 \end{cases}$ (Applicare nelle due equazioni i logaritmi a entrambi i membri; dividere membro a membro..., si otterrà poi $x=y^2$ e ...). $\left[\begin{cases}1\\1\end{cases};\begin{cases}4\\2\end{cases}\right]$

614 $\begin{cases} log_6(3^{2x+1}+3^{y+1})-log_6(3^{y-x}+6)=1 \\ 9^x=3^y \end{cases}$ $\left[\begin{cases}1\\2\end{cases}\right]$

615 $\begin{cases} 2\ log_5x+log_4y=5 \\ log_5x-log_4y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} log\ x+\dfrac{1}{log_y10}=log_28 \\ x^{log\ y}=100 \end{cases}$ $\left[\begin{cases}25\\4\end{cases};\begin{cases}10\\100\end{cases}\text{e}\begin{cases}100\\10\end{cases}\right]$

616 $\begin{cases} log_8x+\dfrac{1}{3\ log_y2}=1 \\ \dfrac{1}{log_x4}+log_2y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} log_2(x+y)=2-\dfrac{1}{log_32} \\ 2\ log_9x+1=\dfrac{1}{log_y3} \end{cases}$ $\left[\begin{cases}4\\2\end{cases};\begin{cases}\frac{1}{3}\\1\end{cases}\text{non accettabile...}\right]$

Risolvere le seguenti disequazioni e i seguenti sistemi di disequazioni.

617 $log_a(x^2-3)\geq 0$, con $a>1$. $[x\leq -2 \vee x\geq 2]$

618 $log_a(5-x^2)>0$, con $0<a<1$. $[-\sqrt{5}<x<-2 \vee 2<x<\sqrt{5}]$

619 $log_{\frac{2}{3}}(2x+5)-log_{\frac{3}{2}}\dfrac{1}{x}\geq 0$. [nessun valore di x]

620 $[log_2(2^{x-1}-1)](3^{2x+1}-9)>0$. $[x>2]$

621 $log_ax+2>log_a^2x$, con $a>1$. $[a^{-1}<x<a^2]$

622 $log_ax^2-log_ax+2>0$, con $0<a<1$. $[0<x<a^{-2}]$

623 $\dfrac{log_3x+1}{log_3x-1}-\dfrac{log_3x+2}{log_3x-2}+3\leq 0$. $[\sqrt[3]{9}\leq x<3 \vee 9<x\leq 27]$

624 $\dfrac{log_2x-1}{log_2x+1}-\dfrac{log_2x-2}{log_2x+2}-\dfrac{1}{3}\geq 0$. $\left[\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{1}{2}\vee 2\leq x\leq 4\right]$

625 $\dfrac{2}{log_5^2(x-4)}\leq 2-\dfrac{3}{log_5(x-4)}$. $\left[4<x\leq 4+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vee x\geq 29\right]$

626 $\dfrac{2}{log_4^2(x+3)}\leq 2-\dfrac{3}{log_4(x+3)}$. $\left[-3<x\leq -\dfrac{5}{2}\vee x\geq 13\right]$

627 $\sqrt{log_2^2 x - 4} \geq log_2 x + 1; \quad \sqrt{log_3^2 x - 9} \geq log_3 x + 1.$ $\left[0 < x \leq \frac{1}{4};\ 0 < x \leq \frac{1}{27}\right]$

628 $\sqrt{(log_2 x - 3)(log_2 x - 1)} \geq log_2 x + 2.$ $\left[0 < x \leq \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right]$

629 $\sqrt{(log_3 x - 2)(log_3 x - 1)} \geq log_3 x + 3.$ $\left[0 < x \leq 3^{-\frac{7}{9}}\right]$

630 $log_2(4^{2x} - 3 \cdot 4^x + 6) \leq log_2(4^x - 2) + log_2(4^x + 1).$ $[x \geq 1]$

631 $log_{\frac{1}{2}}(7 - 2^x) - log_{\frac{1}{2}}(5 + 4^x) + log_{\frac{1}{2}} 7 \geq 0.$ $\left[2 \leq x < \frac{log\ 7}{log\ 2}\right]$

632 $\sqrt{1 - log_2 x} > 1; \quad log(\sqrt{x} - x) < 0.$ $[0 < x < 1;\ 0 < x < 1]$

633 $\sqrt{log_a(x^2 - 1)} > \sqrt{log_a(2x + 1)}.$ [per $0 < a < 1$: nessun valore di x
per $a > 1$: $x > \sqrt{3} + 1$.]

634 $log_3(\sqrt{x - 1} - 2) < 0; \quad log_3(\sqrt{2x - 5} - 2) > 0.$ $[5 < x < 10;\ x > 7]$

635 $log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2) + log_2(x - 2) \leq -2\ log_4(x + 1).$ $[x > 2]$

636 $log(4^{1-x} + 2) - log(2^{2x+1} - 3) < log\ 2.$ $\left[x > \frac{log(1 + \sqrt{2}\,)}{log\ 4}\right]$

637 $log_3(3 \cdot 2^{2x} - 2^x) - log_3(2^x + 1) \geq x\ log_3 2.$ $[x \geq 0]$

638 $log_2(2 \cdot 3^{2x} - 3^x) - log_2(3^x + 1) \geq x\ log_2 3.$ $[x \geq log_3 2]$

639 $log_2(6^{2x} - 3 \cdot 6^x) \leq log_2(6^x + 3) + log_2(6^x - 4).$ $[x \geq 1]$

640 $x^{log\sqrt{x}} > 100; \quad log_3(2 - 3^x) + x > 0.$ [$0 < x < 10^{-2} \vee x > 10^2$; impossibile]

641 $6^x - 3^{x+1} - 2^{x+1} + 6 \geq 0.$
(Scomporre in fattori, osservando che è $6^x = 2^x \cdot 3^x$...) $\left[x \leq \frac{log\ 2}{log\ 3} \vee x \geq \frac{log\ 3}{log\ 2}\right]$

642 $10^x + 2^x < 5 + 5^{x+1} \quad (10^x = 2^x \cdot 5^x...)$ $\left[x < \frac{log\ 5}{log\ 2}\right]$

643 $3 + (2 \cdot 7^x - 3)(7^{x-1} + 2) > 2 \cdot 7^x.$ $\left[x > \frac{log\ 3 - log\ 2}{log\ 7}\right]$

644 $4^x - 6 \cdot 10^x + 9 \cdot 25^x > 0; \quad 49^x - 10 \cdot 21^x + 25 \cdot 3^{2x} \leq 0.$ $\left[x \neq log_{\frac{2}{5}} 3;\ x = log_{\frac{7}{3}} 5\right]$

645 $log_{2-x}(x - 1) > 1; \quad log_2 x + log_x 2 < 2.$ $\left[1 < x < \frac{3}{2};\ 0 < x < 1\right]$

646 $81\ log_{\frac{1}{8}}^4 x + log_{\frac{1}{2}}^2 x - 2 \geq 0.$ $\left[0 < x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 2\right]$

647 $\frac{2 + log_2 x}{2\ log_2 x - 1} - 3 + \frac{1 + 3\ log_2 x}{2 + log_2 x} > 0.$ $\left[0 < x < \frac{1}{4} \vee \sqrt{2} < x < 8 \vee x > 8\right]$

648 $log_2|4-x^2|<1.$ $[-\sqrt{6}<x<-\sqrt{2}\vee\sqrt{2}<x<\sqrt{6}\wedge x\neq\pm 2]$

649 $|1-log_3 x|<1+log_3 x;\quad \dfrac{|log\,x+1|-2}{log\,x}<1.$ $[x>1;\ 0<x<10^{-\frac{3}{2}}\vee x>1]$

650 $log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3|x|+1}{2+|x|}<1;\quad log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3+|x+3|}{|x-1|-2}>0.$ $[\forall x\neq 0;$ impossibile$]$

651 $|log_a x-2|-log_a^2 x>0,\ a\in\mathbb{R}^+-\{1\}.$
$[$per $a>1$: $a^{-2}<x<a$; per $0<a<1$: $a<x<a^{-2}]$

652 $\left||log_{\frac{1}{2}}(x+2)-3|-2\right|<1.$ $\left[-\dfrac{127}{64}<x<-\dfrac{31}{16}\vee-\dfrac{7}{4}<x<-1\right]$

653 $log_{\frac{2}{3}}\left(2x^2-\dfrac{2}{5}x\right)<log_{\frac{2}{3}}\,log_{\frac{4}{9}}\sqrt[5]{\dfrac{8}{27}}.$ $\left[x<-\dfrac{3}{10}\vee x>\dfrac{1}{2}\right]$

654 $\sqrt{|log_a x+2|-2}<\sqrt{3-|log_a x+1|},\quad a\in\mathbb{R}^+-\{1\}.$
$[a>1$: $1\leq x<a$; $0<a<1$: $a<x\leq 1]$

655 $log_2\left|log_2\dfrac{1}{x}\right|<2;\quad log_{\frac{1}{2}}\dfrac{|x|+1}{2+|x|}>1$ $\left[\dfrac{1}{16}<x<16\wedge x\neq 1;\right.$ impossibile$\left.\right]$

656 $log_{1-x}\dfrac{12x^2+17x+5}{12}\geq 0$ $\left[x\leq-\dfrac{7}{4}\vee 0<x\leq\dfrac{1}{3}\right]$

657 $0<log_2(5x+3)<1;\quad -1<log_3(x-1)<1.$ $\left[-\dfrac{2}{5}<x<-\dfrac{1}{5};\ \dfrac{4}{3}<x<4\right]$

658 $\begin{cases}log_2(x-1)>1\\ log_{\frac{1}{2}}x>2\end{cases};\quad \begin{cases}log_{\frac{1}{2}}x-2\leq 0\\ log_2(x-1)+3>0\end{cases}$ $\left[\text{impossibile};\ x>\dfrac{9}{8}\right]$

659 $\begin{cases}log_{\frac{1}{2}}(x^2-8)>0\\ log_3(2+x^2)>1.\end{cases}$ $[-3<x<-2\sqrt{2}\vee 2\sqrt{2}<x<3]$

660 $\begin{cases}log_{\frac{1}{2}}\,log_2(4-3x)\geq 0\\ log_2\,log_{\frac{1}{2}}(1-x)\geq 0\end{cases};\quad \begin{cases}ln\,x+\dfrac{1}{ln\,x}>2\\ |ln\,x-1|+2\,ln\,x>2\end{cases}$ $\left[\dfrac{2}{3}\leq x<1;\ x>e\right]$

661 $\begin{cases}log\,x-\dfrac{2}{log\,x}+1\geq 0\\ \dfrac{|log\,x+1|-2}{log\,x}<1\end{cases}$ $[10^{-2}\leq x<10^{-\frac{3}{2}}\vee x\geq 10]$

662 $\begin{cases}\dfrac{log_2(x+2)}{log_{\frac{1}{3}}(x^2-1)}\leq 0\\ log_2^2 x-3\,log_2 x+2>0\end{cases};\quad \begin{cases}\dfrac{2-log_{\frac{1}{2}}x}{3+log_2 x}\leq 0\\ log_{16}\dfrac{x+1}{2x-1}>\dfrac{1}{2}\end{cases}$ $[\sqrt{2}<x<2\vee x>4;$ impossibile$]$